

Michel Felgenhauer

**Synthetische Lundgren-Wirbel und
Lagrange Kohärente Objekte**

Wissenschaftlicher Aufsatz

BEI GRIN MACHT SICH IHR WISSEN BEZAHLT



- Wir veröffentlichen Ihre Hausarbeit, Bachelor- und Masterarbeit
- Ihr eigenes eBook und Buch - weltweit in allen wichtigen Shops
- Verdienen Sie an jedem Verkauf

Jetzt bei www.GRIN.com hochladen
und kostenlos publizieren



Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de/> abrufbar.

Dieses Werk sowie alle darin enthaltenen einzelnen Beiträge und Abbildungen sind urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsschutz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlanges. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen, Auswertungen durch Datenbanken und für die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronische Systeme. Alle Rechte, auch die des auszugsweisen Nachdrucks, der fotomechanischen Wiedergabe (einschließlich Mikrokopie) sowie der Auswertung durch Datenbanken oder ähnliche Einrichtungen, vorbehalten.

Impressum:

Copyright © 2020 GRIN Verlag
ISBN: 9783346276841

Dieses Buch bei GRIN:

<https://www.grin.com/document/922760>

Michel Felgenhauer

**Synthetische Lundgren-Wirbel und Lagrange Kohärente
Objekte**

GRIN - Your knowledge has value

Der GRIN Verlag publiziert seit 1998 wissenschaftliche Arbeiten von Studenten, Hochschullehrern und anderen Akademikern als eBook und gedrucktes Buch. Die Verlagswebsite www.grin.com ist die ideale Plattform zur Veröffentlichung von Hausarbeiten, Abschlussarbeiten, wissenschaftlichen Aufsätzen, Dissertationen und Fachbüchern.

Besuchen Sie uns im Internet:

<http://www.grin.com/>

<http://www.facebook.com/grincom>

http://www.twitter.com/grin_com

Synthetische Lundgren-Wirbel und Lagrange Kohärente Objekte

In Szenarien realer Fluide tauchen spiralige Strukturen auf, die selbst in größeren zeitlichen Formaten eine erstaunliche Gestaltstabilität aufweisen. Auf den ersten Blick ist man geneigt, sie Wirbel zu nennen, doch zeigt sich rasch, dass diese zusammenhängenden spiraligen Formationen sich einer Betrachtung mit Mitteln der klassischen Wirbelphysik entziehen. Der vorliegende Aufsatz versucht ausgewählte spiraligen Strukturen als Lagrange Kohärente Objekte (LCO) zu beschreiben. LCO scheinen dabei die energetische Potenz zu besitzen, das sie umgebende Strömungsfeld zu organisieren. In einem theoretischen Modell und einer anschließenden Simulation wird diese Produktivität als Induktionswirkung des Lagrange Kohärenten Objektes auf den umgebenden Strömungsraum beschrieben. Es zeigt sich, dass ein und dasselbe LCO in varianten räumlichen Formationen unterschiedlich große Impulswirksamkeit besitzt.

In scenarios of real fluids, spiral structures appear, which even in larger temporal formats show an astonishing shape stability. At first glance, one is inclined to call them vortices, but it quickly becomes apparent that these coherent spiral formations cannot be viewed with the means of classical vortex physics. The present paper tries to describe selected spiral structures as Lagrange coherent objects (LCO). LCO seem to have the energetic power to organize the surrounding flow field. In a theoretical model and a subsequent simulation, this productivity is described as the induction effect of the Lagrange coherent object on the surrounding flow space. It turns out that one and the same LCO has differently large impulse effectiveness in different spatial formations.

Michel Felgenhauer, Berlin im Sommer 2020

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

Eine Phänomenologie Lagrange Kohärenter Objekte (LCO) deutet „spirale Gebilde als Systeme, die um ein Zentrum gewunden spirale und gleichzeitig zirkulationsbehaftet sind“. Sie tauchen in einem dreidimensionalen Strömungsfeld separiert auf und stehen mit diesem in Wechselwirkung. Lagrange Kohärenter Objekte sind, aus der Sicht dieser Phänomenologie, von ihrem Wesen her Wirbelfäden im Sinne der Helmholtzschen Wirbeltheorie und gleichsam Fluidische Trajektorien modernerer Interpretationen. Das soll zur Folge haben, dass ohne eine wirbelanfachte äußere Kraft das wirbelfreie Strömungsgebiet weiterhin wirbelfrei bleibt, Fluidelemente, die einem zirkulationsbehafteten LCO anliegen, dort verbleiben und die Zirkulation entlang eines Lagrange Kohärenten Objekts konstant bleibt.

Jedes Lagrange Kohärente Objekt lanciert Induktionswirkungen im umgebenden Fluid, es „organisiert“ das Strömungsfeld. Ursache der Induktionswirkungen ist das dem Lagrange Kohärenten Objekt eingeschriebene innere Milieu. Die Zirkulation ebendort stammt aus einem Wechselwirkungsgeschehen bei der Entstehung des LCO. Lagrange Kohärente Objekte können spirale sein. Wirbel und Spiralen werden in der Natur beobachtet und sind Gegenstand mathematischer Beschreibungen, physikalischer Modell und numerischer Computersimulationen. Damit erfüllen sie so manche Wunschvorstellungen für theoretisch abstrakte Laboruntersuchungen artifizierlicher LCO. Ganz zu schweigen von ihrer Potenz, eine durchaus waghalsige Phänomenologie fremdartiger, wirbeliger Systeme zu befeuern.

Nach der Potentialtheorie sind die pfadabhängigen Induktionswirkungen eines zirkulationsbehafteten Lagrange Kohärenten Objekts zunächst die in dessen Umgebung im Feld induzierten Geschwindigkeiten. Die Geschwindigkeit ist als physikalische Größe superponierbar, extensiv¹ und in Ebenen und Räumen mit definierten Systemgrenzen bilanzierbar. Dies ist insofern von Bedeutung, dass

¹ Extensive Größen sind solche, die man sinnvoll addieren kann, für die es Bilanzen und Erhaltungssätze geben kann: Energie, Geld, Masse, Impuls, Volumen, Fläche, Länge, Zeit.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

diverse Quellen Q entlang eines LCO in deren Umgebung in allen Aufpunkten A partielle Geschwindigkeitsbeiträge induzieren, die sich zusammen mit den Randbedingungen (etwa der Systemgeschwindigkeit) des fluidischen Raumes zu einer Gesamtgeschwindigkeit kumulieren.

Die in das Strömungsfeld induzierten Geschwindigkeiten lassen Schlüsse auf das in das Feld induzierte Energie-Brutto zu. Die in das Feld induzierten Geschwindigkeiten lassen gleichsam Schlüsse auf die Impulsmächtigkeit der Induktionen zu. Der quantifizierbare, Unterschied zwischen dem Energiegehalt und der Impulsmächtigkeit eines Systems ist die Richtungsabhängigkeit des Impulses und die scheinbare Richtungsfreiheit der Energie in den Systemgrenzen eines fluidischen Raumes; das bedeutet: zwei unterschiedlich, richtungsbehaftet induzierte Größen „zehren“ sich auf, etwa der Impuls $p \sim mv$ [Ns], während aus den zweiten Potenzen die Energie $e \sim mv^2$ [Nm] immer positiv hervorgeht!

Die Qualität des Energiegehalts und der Impulsmächtigkeit kann sich also insofern unterscheiden, wenn wir die Erzeugendenwirkung (hier die induzierte Geschwindigkeit) in einer Bilanz „verrechnen“ oder eben nicht. Rein mathematisch kommt es entweder zu einer Kompensation der Wirkungen der Induktion oder eben nicht; die dem System inhärente Energie bleibt konstant und könnte unter bestimmten Umständen erscheinen (it could! emerge).

Das klingt zunächst paradox. Um dieses physikalische Phänomen etwas genauer zu beleuchten, betrachten wir ein elektrodynamisches Geschehen, das wir sofort verstehen und das vollständig erklärt ist.

Mancher Zeitgenosse, der noch kein umweltfreundliches Elektromobil fährt, sondern mit einem Auto, einem Motorrad oder einer liebenswerten Zwei-Takt-Velo-Solex mobil ist, besitzt vielleicht ein kleines Handbuch zum Fahrzeug, das die Wirkungsweise der Zündspule des Benzinmotors erklärt und er erfährt ebendort:

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

Die Zündspule enthält einen Eisenkern und um diesen herum eine Hochspannungs- und eine Niederspannungswicklung.

Bei eingeschalteter Zündung und geschlossenem Unterbrecher erzeugt der durch die Niederspannungswicklung fließende Batteriestrom (12 Volt) ein kräftiges Magnetfeld. Dieses Magnetfeld bricht beim Öffnen der Unterbrecherkontakte zusammen, dadurch entsteht dann in der Hochspannungswicklung durch Induktionswirkung die Spannung für den Zündfunken. Diese Spannung ist umso größer, je stärker das Magnetfeld ist und je rascher es zusammenbricht. Ein zum Unterbrecher nebengeschalteter Kondensator dient zur Funkenlöschung und damit zum raschen Zusammenbruch des Magnetfelds².

Ein spulenförmiges Gebilde induziert also eine Induktionswirkung in einem Feld. Genau dann, wenn die elektromagnetische Induktionsursache erlischt, passiert etwas Neues. Vermittelt durch einen gemeinsamen Eisenkern wird in einem benachbartem Spulensystem eine elektrische Wirkung, die Zündspannung, messbar. Das zusammenbrechende elektrische Magnetfeld ist eine reiflich untersuchte physikalische Erscheinung, die wir unmittelbar verstehen. Auch ein elektrisches Wechselfeld bricht periodisch zusammen; mit der zweifachen Nennfrequenz. Wir nutzen dieses elektrodynamische Prinzip zur Transformation von Betriebsspannungen in jedem Computer-Netzteil.

Die Prozesse in Benzinmotoren laufen dort mit hoher Eile ab und werden eher durch das thermodynamische Geschehen und nicht durch die Geschwindigkeit der elektrischen Induktionswirkungen limitiert. Eine Viertakt-Verbrennungskraftmaschine hat bei einer Drehzahl $n=6000 \text{ min}^{-1}$, eine Arbeitsspielfrequenz von 50 Hz, die eines performanten Zweitaktmotors kann bei 200 Hz liegen. So gut.

² Martini, B. (1960) Kraftfahrer-Lehrbuch. 65. Auflage. R. C. Schmidt & Co Lehrmittel und Fachverlag Braunschweig-Berlin.

Der Lundgren-Wirbel

Als in der deutschen Ausgabe der Scientific American das hübsche Bildchen einer Lundgren-Wirbelstruktur mit der „Kevin Helmholtz-Instabilität“ unternitelt sah, dachte ich sogleich daran, dieses kleine Missgeschick zum Anlass eines ebenso kleinen Schabernacks zu machen. Im Stile des PDQ Bach³. Aber das war dann doch keine so gute Idee.

Der Lundgren-Wirbel⁴ ist ein Modell für die intermittierende Feinstruktur von Turbulenzen mit hoher Reynoldszahl; Lundgren schreibt: „Das Modell besteht aus schlanken coaxialen Spiralwirbellösungen, einem Ensemble zufällig orientierter strukturierter zweidimensionaler Wirbel, die durch einen axialsymmetrischen Dehnungsfluss gedehnt werden.“

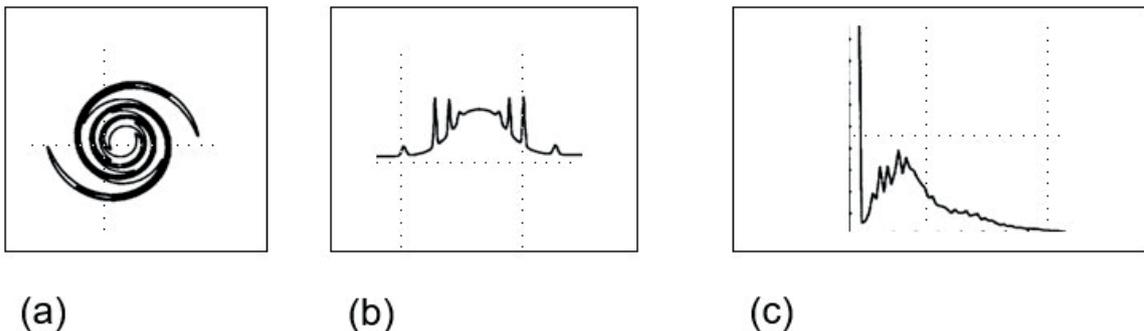


Abb.1: (a) Wirbelform, (b) Geschwindigkeitsverteilung, (c) Spektrum der Geschwindigkeit. (eigene Darstellung Mi. Felgenhauer 2020: Skizze schematisch nach Graphiken aus: T. S. Lundgren (1982) Strained spiral vortex model for turbulent fine structure, The Physics of Fluids 25, 2193.)

³ P. D. Q. Bach ist ein erfundener Komponist und angeblich der jüngste Sohn von Johann Sebastian Bach. Die Figur des P. D. Q. Bach, dem sein Schöpfer die Lebensjahre 1742 bis 1807 zuschreibt, ist jedoch mittlerweile weit mehr als ein bloßer wissenschaftlicher Witz, da seine Biographie und seine (bzw. Peter Schickeles) Musik vor allem bei Musikern eine gewisse Popularität genießen und immer wieder zitiert und aufgeführt werden. https://de.wikipedia.org/wiki/P._D._Q._Bach

⁴ T. S. Lundgren (1982) Strained spiral vortex model for turbulent fine structure, The Physics of Fluids 25, 2193

Lundgren spricht ferner von der Existenz eines selbstähnlichen und Entrophie erhaltenden Bereichs im zweidimensionalen Kolmogorov-Entrophie-Spektrum⁵, der Fourier-Analyse über die Geschwindigkeitsquadrate in einer Schnittebene. Das Eindrehen der Spiralwindungen (schreibt Lundgren) erzeugt eine Kaskade von Geschwindigkeitschwankungen in kleinerem Maßstab. Ergebnisse sind unempfindlich gegenüber der Zeitabhängigkeit der Dehnungsrate, einschließlich selbst intermittierender Ein-oder Aus-Dehnungen.

Im Wesentlichen also war 1982 alles gesagt. Die Grundstruktur, die Geschwindigkeitsverteilung, das Energiespektrum. Die Transienz. Und es gibt periodische Phänomene (homomorphe Ein-Aus-Dehnungen) die die geometrische Erscheinung des Wirbels stabilisieren.

Krasny (1985) gibt eine Entwicklungs-Gleichung für typische von Lundgren vorgeschlagene spiralige Formationen als periodisches (eindimensionales) Kontinuum an; er desingularisiert den Wirbel. Heute würden wir vielleicht sagen, Robert Krasny⁶ beschreibt in der Mitte der 80er Jahre ein (unendliches) kohärentes System. Das Schöne an diesen Differentialgleichungen (und für die von ihnen erzeugten Formen ist dies durchaus auch unter ästhetischen Maßstäben zu behaupten) ist, dass der Grad der Wirbeligkeit vorausbestimmt wird, so dass sich kein- mehr- oder wenig-gängige Formationen erzeugen lassen. Krasny verwendet einen potentialtheoretischen Ansatz. In der Veröffentlichung [Kra-85] kommt man nicht umhin, dabei zuzusehen, wie der Lundgren-Wirbel aus einer linearen Form heraus evolviert. Das Entwicklungsgesetz (dx/dt ; dy/dt) erinnert stark an die auf freie Oberflächen angewandte Wellentheorie, ebenfalls ein potentialtheoretischer Ansatz. Das ist in zweierlei Hinsicht beeindruckend, nimmt der Ansatz die Existenz einer (freien) Oberfläche der beschleunigten Kelvin-Helmholtz-Scherschicht zur Grundlage der Betrachtungen und damit spätere computerunterstützte Untersuchungen an (und mit) transienten Wirbelmodellen vorweg.

⁵ Die Mikroskala von Kolmogorow ist die kleinste Skala bei der Betrachtung der Energiekaskade einer turbulenten Strömung.

⁶ [Kra-85] Krasny, R. (1985) Desingularization of Periodic Vortex Sheet Roll-up. Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University,

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

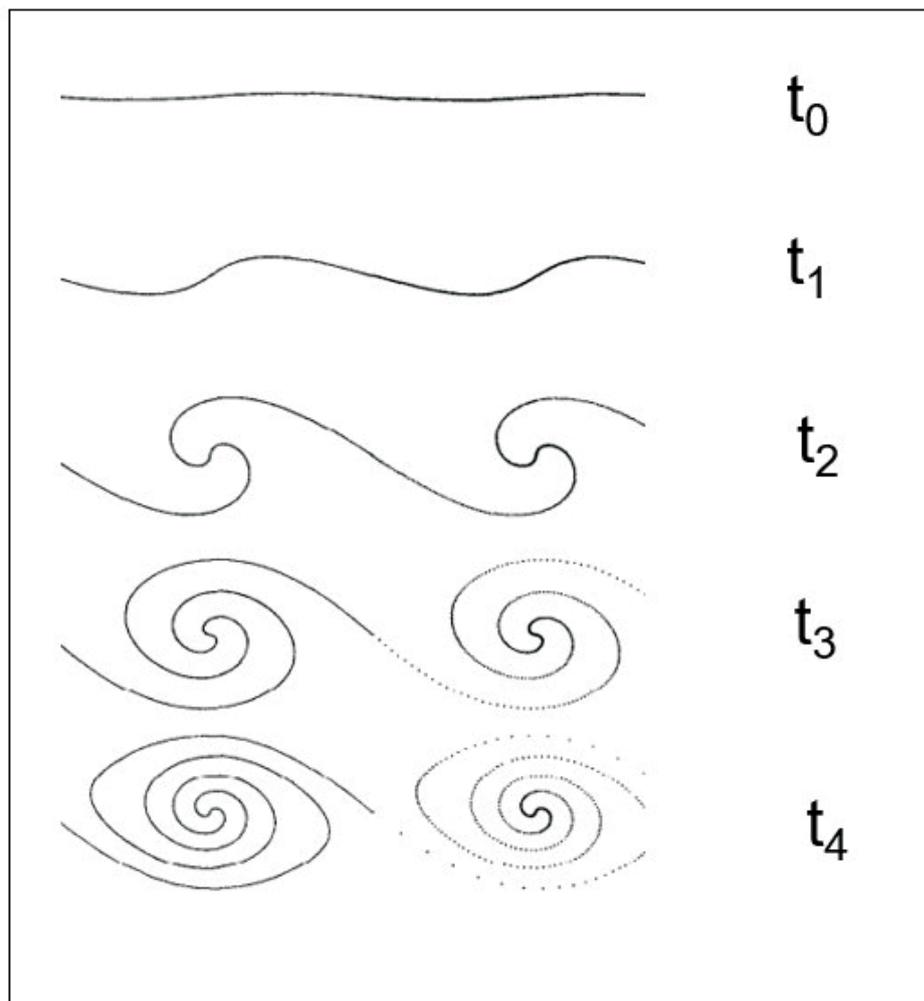


Abb. 2: Skizze schematisch nach [Kra-86]: Solution of the ordinary differential equations with $\delta = 0.5$ and $N=100$ at times $t= 0, 1, 2, 3, 4$. Interpolating curves are plotted⁶, Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichungen mit $\delta=0.5$ und $N=100$ zu Zeiten $t=0,1,2,3,4$. Interpolationskurven (eigene Darstellung Mi. Felgenhauer 2020).

Dieserart entsteht in den frühen 80er Jahren ein abstraktes „parametrisierbares Objekt“, das als numerisches Modell weiteruntersucht werden konnte. Was aber dann erstaunlicherweise eher wenig geschah und auf diese Weise der Gemeinde der klassischen

Wirbelmodelle den „Lundgren-Wirbel“ vorenthielt. Die zeitliche Entwicklung des Lundgren-Wirbels (Abb.2) zeigt Krasny⁷ in [Kra-86]. Mit dem massiven Ausbau der Rechnerkapazitäten in den späten 80er Jahren und der wachsenden (Software-) Verfügbarkeit leistungsstarker Strömungssimulationsverfahren Computational Fluid Dynamics, CFD geraten potentialtheoretische Ansätze mehr und mehr in den Hintergrund. Moffat⁸ (1992) nennt die Lundgren-Formation das endgültige Ergebnis der Kelvin-Helmholtz-Instabilität und zeichnet das Wirbelmodell als eine geschlossen-kohärente Struktur. Wir erkennen nach den (wellentheoretischen) Formeln Krasnys zum Entwicklungsgesetz der Lundgrenwirbel und in den von Moffat zitierten Lundgren-Formationen die Kurve einer Fermat-Spirale⁹, alleine ihrer eleganten, geometrischen und algorithmischen Erscheinung nach.

Lagrange Kohärente Objekte

Kommen wir noch einmal auf die Zündspule zurück. Abgesehen von den vergleichbar geringen elektrischen Verlusten, ist die durch die Induktionswirkung in das elektrische Feld eingebrachte Energie also noch vorhanden, auch wenn die Induktionsursache plötzlich nicht mehr existiert. Die Energie geht nicht verloren. Genau dies ist die Idee der Untersuchung spiralig Lagrange Kohärenter Objekte. Der Feldtheorie ist es egal, ob sie auf elektrodynamische Felder angewandt wird, oder auf komplexe Strömungen. Der Lorenzkraft eines elek-

⁷ $\frac{dx_j}{dt} = (-1/2N) \sum_k^N [\sinh(2\pi(y_j - y_k)) / (\cosh(2\pi(y_j - y_k)) - \cos(2\pi(x_j - x_k)) + \delta^2)]$
 $\frac{dy_j}{dt} = (1/2N) \sum_k^N [\sin(2\pi(x_j - x_k)) / (\cosh(2\pi(y_j - y_k)) - \cos(2\pi(x_j - x_k)) + \delta^2)]$

⁸ H.K. Moffatt (1992) Spiral structures in turbulent flow. Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, Silver Street, Cambridge, CB39EW

⁹ ⁹ PIERRE DE FERMAT (* 20. August 1601 Beaumont, † 12. Januar 1665 Castres) französischer Mathematiker. Er begründete neben RENÉ DESCARTES die analytische Geometrie. Des Weiteren arbeitete er auf den Gebieten der Zahlentheorie und war an der Ausarbeitung von Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung beteiligt. Eine besondere Berühmtheit erlangte sein Name im Zusammenhang mit dem sogenannten (großen) Satz von Fermat, dessen Beweis viele Generationen von Mathematikern beschäftigte und erst im Jahre 1994 durch einen britischen Wissenschaftler gelang.

trischen Zugankers ist der in einer fluidmechanischen Wirbelspule beschleunigten Strömung adäquat und mit dem allgemein gültigen Gesetz von Biot und Savart in einem dreidimensionalen Strömungsraum oder einem elektrischen Feld beschreibbar. Die in diesem Aufsatz untersuchten Modelle Lagrange Kohärenter Objekte, baut auf der Strömungsmechanik makroskopischer Wirbelstrukturen, der tradierten Lehre und der ihr innewohnenden Physik auf. Das innere Milieu der untersuchten Systeme folgt also jenen Wirbelsätzen, die Hermann von Helmholtz¹⁰ um 1859 formuliert hat:

Erster Helmholtz'scher Wirbelsatz:

In Abwesenheit von wirbelanfachenden äußeren Kräften bleiben wirbelfreie Strömungsgebiete wirbelfrei.

Zweiter Helmholtz'scher Wirbelsatz:

Fluidelemente, die auf einer Wirbellinie liegen, verbleiben auf dieser Wirbellinie. Wirbellinien sind daher materielle Linien.

Dritter Helmholtz'scher Wirbelsatz:

Die Zirkulation entlang einer Wirbelröhre ist konstant. Eine Wirbellinie kann deshalb im Fluid nicht enden. Wirbellinien sind geschlossen, buchstäblich unendlich oder laufen auf den Rand.

Der erste Wirbelsatz bedeutet, dass sowohl die Zirkulation längs der Randkurve einer Fläche, die ganz auf dem Mantel einer Wirbelröhre liegt, verschwindet als auch, dass die Zirkulation verschiedener Querschnitte einer Wirbelröhre gleich ist. Der zweite Wirbelsatz besagt, dass Wirbelröhren zugleich Stromröhren sind, Wirbel an Materie (Fluid) anhaften und drittens, Teilchen, die einmal eine Wirbellinie gebildet haben, dies auch weiterhin tun (Kohärenz). Der dritte Wirbelsatz fordert die zeitliche Konstanz der Zirkulation in einer

¹⁰ Sinngemäß nach: https://de.wikipedia.org/wiki/Helmholtzsche_Wirbelsätze, Hermann Ludwig Ferdinand Helmholtz, ab 1883 von Helmholtz, (* 31. August 1821 in Potsdam; † 8. September 1894 in Charlottenburg bei Berlin) war ein deutscher Physiologe und Physiker. Als Universalgelehrter leistete er wichtige Beiträge zur Optik, Akustik, Elektrodynamik, Thermodynamik und Hydrodynamik.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

(und um eine) Wirbelröhre. Die Helmholtz'schen Wirbelsätze sind Grundlage der Physik des hier vorgeschlagenen spiraligen Lagrange Kohärenten Objekts.

Eine Theorie Lagrange Kohärenter Strukturen (LCS) wurde in den frühen 2000er Jahren am Lefschetz Center for Dynamical Systems der Brown University, später an der ETH Zürich, dort am Department of Mechanical and Process Engineering, entwickelt. Das Akronym LCS (Lagrange Coherent Structures) stammt von Haller & Yuan (2000)¹¹. Haller suchte nach einem Ansatz, die abstoßenden und anziehenden Fluidbewegungen in Scherschichten zu beschreiben. Beschleunigte Scherschichten sind im Labor nur in speziellen mehrgebläsigen Windkanälen sicher generierbar. In Zürich wusste man aus der weitestgehend experimentellen Vergangenheit und hatte beobachtet, dass innerhalb fluidischer Regime Systemgrenzen im Sinne von „Materialoberflächen“ existieren, die zusammenhängende Strukturen von der restlichen Strömung separieren. Diese extraordinären Systeme entwickeln eine komplexe körper- und richtungsbezogene Dynamik innerhalb einer Strömung. Als man in Zürich mit der Forschung ansetzte, konnten die Wissenschaftler noch auf keine tragfähigen theoretischen Modelle zur quantitativen Beschreibung dieser sonderbaren physikalischen Geschehnisse zugreifen. Rasch wurde klar, dass es zukünftig großvolumiger, numerischer Modelle und komplexer Simulationen bedarf, die seltsamen Systemoberflächen der nunmehr Lagrange Coherent Structures (LCS) genannten Systeme, in Strömungsszenarien aus experimentellen und numerischen Daten zu isolieren und sie notfalls mit einer vereinfachenden Herangehensweise beschreibbar zu machen, sie zu verstehen. Hallers Forschung ging der Frage nach, ob es gelingen könnte, Mischung, Entmischung und Massetransport in und um Lagrange Kohärenter Systeme in komplexen fluidischen Systemen

¹¹ Lagrangian coherent structures and mixing in two-dimensional turbulence, G. Haller, G. Yuan Division of Applied Mathematics, Lefschetz Center for Dynamical Systems, Brown University, Providence, RI 02912, USA Received 11 February 2000; received in revised form 6 June 2000 ; accepted 10 July 2000 Communicated by U. F

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

vorherzusagen oder sogar zu beeinflussen. Es wurden im Zuge der Theoriebildung nichtlineare dynamische (System-) Methoden entwickelt, um komplexe Probleme in der angewandten Wissenschaft und der Technik zu lösen, etwa die Analyse von Transportprozessen und Kohärenz in einem Ozean und in der Atmosphäre, die Echtzeiterfassung von Luftturbulenzen in der Nähe von Flughäfen, die Theorie und Kontrolle der instationären, aerodynamischen Trennung, die Dynamik von Trägheitsteilchen unter Gedächtniseffekten und die Theorie des dynamischen Übergangszustands bei chemischen Reaktionen.

Eine Phänomenologie Lagrange Kohärenter Objekte (LCO) deutet „spiralige Gebilde“ als Systeme, die zirkulationsbehaftet sind, in einem Strömungsfeld separiert auftauchen und mit diesem in Wechselwirkung stehen. Sie sind – aus der Sicht dieser Phänomenologie – von ihrem Wesen her Wirbelfäden im Sinne der Helmholtzschen Wirbeltheorie und gleichsam Fluidische Trajektorien, wie Haller sie beschreibt. Das soll zur Folge haben, dass ohne eine wirbelanfachende äußere Kraft das wirbelfreie Strömungsgebiet weiterhin wirbelfrei bleibt, Fluidelemente, die einem zirkulationsbehafteten LCO anliegen, dort verbleiben und die Zirkulation entlang eines Lagrange Kohärenter Objekts konstant bleibt. Das Lagrange Kohärente Objekt endet nicht irgendwo im Fluid oder an einer Phasengrenze, sondern betrachtet wird immer nur ein kleiner Abschnitt in vorgegebenen Systemgrenzen.

Das Lagrange Kohärente Objekt platziert Induktionswirkungen in dem umgebenden Strömungsfeld, es „organisiert“ die Strömung. Ursache der Induktionswirkungen ist die dem Lagrange Kohärenten Objekt einbeschriebene Zirkulation die ihrerseits von einem Wechselwirkungsgeschehen bei der Entstehung des LCO hat. Entstehungsursachen Lagrange Kohärenter Objekte und Systeme sind aber nicht Gegenstand der Phänomenologie.

Zur Potentialtheorie

Die Potentialtheorie ist quasi der GOLF3¹² unter den CFD-Verfahren. Sie wird mehr oder weniger geachtet, aber niemand liebt sie wirklich. Vielleicht sage ich es so: „Die Potentialtheorie ist nicht tot. Sie riecht nur so komisch“. In der Laborpraxis und insbesondere in der Forschungsvorbereitung sind gelegentlich rasche Aussagen über zu erwartende physikalische Wechselwirklichkeiten erforderlich. In den Naturwissenschaften und in der Technik sind es oftmals fluidmechanische Fragestellungen, die sowohl einen hohen strukturellen Aufwand (Windkanäle, Strömungsmessstrecken), ausgefeilte numerische Methoden (Strömungssimulation, Computational Fluid Dynamics, CFD) als auch eine sehr hohe theoretische Sachverständigkeit aller Beteiligten fordern. Die numerische Strömungsmechanik ist eine Schlüsselkompetenz in der Ingenieurausbildung. Jedoch verdrängen Rechnerverfügbarkeit und hoch performante CFD-Solver klassische Simulationsmethoden (potentialtheoretische Verfahren) aus der Strömungssimulation. Mit der Potentialtheorie verschwindet auch die Idee sowohl allgemeingültiger wie auch praxisorientierter Feldverfahren aus der Elektrodynamik einerseits und der Fluidmechanik andererseits. Besonders schmerzt der Verlust eines Verweises auf einen universalen gemeinsamen theoretischen Kern. Außerdem ist ein Potential-Code so schnell, dass Strömungsphänomene und deren computergestützte Simulation mit der Potentialtheorie in der Nähe der Echtzeit berechnet und dargestellt werden können. Aber das wissen heute nur noch altersautistische Freaks. Diesen kurzen Aufsatz sehe ich durchaus als einen Nachruf aus strömungsmechanischer Sicht:

Simulationssoftware nimmt in den naturwissenschaftlichen und ingenieurwissenschaftlichen Berufsfeldern einen zunehmend größer werdenden Anteil ein. Die meisten kommerziellen Computerprogram-

¹² ONKO: meinen geliebten Golf3 (Bj. 1991) habe ich dieser Tage verschrotten lassen; natürlich unter Tränen.

me zur Strömungssimulation verwenden so genannte Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen. Diese CFD-Solver benötigen lange Rechenzeiten zur Simulation und Berechnung komplexer Strömungswirklichkeiten. Wir sprechen von Stunden und Tagen. Auf der anderen Seite der Skala stehen Potentialtheoretische Verfahren. Hier verkürzen sich die Berechnungszeiten um den Faktor 1000, rein theoretisch gesehen.

Die durch einen Potentiallöser¹³ erstellte Strömungswirklichkeit kann in ausgesuchten Fällen nah und mit hoher Wahrscheinlichkeit an das reale Strömungsphänomen hinreichen. In der Potentialtheorie werden, unter Berücksichtigung spezieller Anfangs- und Randbedingungen, geschlossene (Potential-) Gleichungen aufgestellt und gelöst. Eingebettet in moderne Programmumgebungen können potentialtheoretische Berechnungen also sehr schnell sein. Meistens sind die Lösungsansätze zweidimensional; aus der marinen Technik sind dreidimensionale Codes bekannt^{14 15} die hochkomplexe Aufgaben lösen. Für die Beschreibung der Induktionswirkungen Lagrange Kohärenter Objekte in diesem Aufsatz, betrachten wir bevorzugt dreidimensionale Strömungsfelder.

Wegen der Linearität der Gleichungen gilt für Potentialströmungen das Superpositionsprinzip, das die Darstellung und Berechnung komplexer Lösungen aus der Überlagerung von einfachen Strömungen für die Elementarlösungen erlaubt. Für Potentialströmungen ist die Zirkulation Null immer dann, wenn keine Festkörper oder Singularitäten eingeschlossen werden. Mit der Zirkulation lassen sich Wirbelstärke und Auftriebskräfte berechnen. Als Potential werden hierbei Skalarfunktionen verstanden, deren partielle Ableitung eine Größe mit physikalischer Bedeutung angibt.

¹³ entnommen aus der Publikation: Dienst, Mi. (2017) Validierung einer potentialtheoretischen Berechnung mit einem 2D-CFD-Verfahren. GRIN-Verlag GmbH München.

¹⁴Siehe z.B.: Perry van Oossanen, Justus Heimann, Juryk Henrichs, Karsten Hochkirch (2009) MOTOR YACHT HULL FORM DESIGN FOR THE DISPLACEMENT TO SEMI-DISPLACEMENT SPEED RANGE 10 th International Conference on Fast Sea Transportation FAST 2009, Athens, Greece, October 2009

¹⁵ FRIENDSHIP SYSTEMS specializes in software and solutions for the design of flow-exposed products.

<https://www.friendship-systems.com/>

Potentiallinien kennen wir als Höhenlinien in einer Landkarte oder als Isobaren auf einer Wetterkarte. Ist eine Strömung wirbelfrei, so folgen aus dem Gradienten der Feldfunktion die Geschwindigkeitskomponenten der Strömung. Bei wirbelfreien Strömungen sind die Vektorkomponenten nicht mehr unabhängig voneinander sondern über das Potential verbunden. Nach dem Satz von Kutta-Joukowski kann etwa die auftriebsbehaftete Umströmung eines Profils als Kombination aus Parallel- und Zirkulationsströmung betrachtet werden, wenn die (Kutta'sche) Abflussbedingung erfüllt ist. Diese fordert ein glattes Abströmen des Fluids an der Profilhinterkante.

Die Programmsysteme JAVAFOIL, EPPLER und XFOIL¹⁶ sind robuste, einfache Codes zur zweidimensionalen Strömungsberechnung nach der Potentialtheorie und arbeiten mit einigen Einschränkungen sehr effizient. Die Betrachtung des Strömungsgeschehens in der Grenzschicht ist bei einem Potentiallöser in aller Regel direktional; das bedeutet, dass die Grenzschichtanalyse keine Rückmeldung an die potentialtheoretische Strömungslösung enthält und keine (zur Konvergenz führenden) Iterationsschleifen durchlaufen werden. Die Direktionalität schränkt natürlich die Aussagekraft der berechneten Strömungswirklichkeit des Potentiallösers über die reale Strömung ein. Für das wandnahe Strömungsgeschehen berechnet JAVAFOIL dann keine laminaren Trennblasen und modelliert keine Strömungstrennung in derartigen Strömungsgebieten. Immer dann, wenn solche Effekte auftreten, werden die Berechnungsergebnisse ungenau. Eine Auftrennung der Strömung, wie sie bei Stall auftritt, wird nur bis zu einem gewissen Grad durch empirische modellierte Korrekturen beschrieben. Strömungstrennung und Stall speziell sind dreidimen-

¹⁶ Das frei verfügbare Programm *JavaFoil* ist in der Programmiersprache Java geschrieben. The potential flow analysis is done with a higher order *panel method* (linear varying vorticity distribution). Taking a set of airfoil coordinates, it calculates the local, inviscid flow velocity along the surface of the airfoil for any desired angle of attack. <http://www.mh-aerotoools.de/airfoils/javafoil.htm>

The Eppler program PROFIL from *Public Domain Computer Programs for the Aeronautical Engineer* containing the original source code, the source code converted to modern Fortran, and several test cases, references for the Eppler program and a revision of Eppler models that includes a correction for compressibility in: <http://www.pdas.com/epplerdownload.html>
XFOIL wurde in den 1980er Jahren von Mark Drela als Entwicklungstool im Daedalus-Projekt beim Massachusetts Institute of Technology programmiert.

XFOIL ist ein interaktives Programm zum Entwurf und zur Berechnung von Tragflächenprofilen im Unterschallbereich.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

sionale Strömungsgeschehen und auch schnittweise durch einen zweidimensionalen Strömungslöser nicht darstellbar. Für Strömungszustände, die jenseits des Stallpunktes liegen, liefert der (zweidimensionale) Potentiallöser ungenaue Ergebnisse. Eine genauere Analyse der Grenzschichtströmung würde ein anspruchsvolleres Verfahren zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen erfordern; dies ist (im Falle einer CFD-Rechnung) mit einer Steigerung der CPU-Zeit um den Faktor 1000 verbunden.

Ansatz für ein Lagrange Kohärentes Objekt

Aus dem Vergleich mit Lösungen aus Experimenten am Strömungskanal kann dem Potentiallöser mit dem Ansatz reibungsfreier Strömung und dem Kriterium der Rotationsfreiheit in ausgesuchten Fällen eine zufriedenstellende Aussagekraft bescheinigt werden.

Rotorfreie Potentialströmungen sind von ihrer Definition her Wirbelströmungen. Unter der Drehung einer Strömung kann man sich die Rotation der einzelnen Fluidteilchen um die eigene Achse vorstellen. Die Wirbelstärke $\underline{\omega}$ ist definiert als:

$$\underline{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } v.$$

$$\underline{\omega} \sim \text{rot } v.$$

Die Komponenten der vektoriellen Wirbelstärke $\underline{\omega}$ sind:

$$\underline{\omega}_x \sim \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\delta v}{\delta y} \right) - \left(\frac{\delta v}{\delta z} \right) \right) \text{ und}$$

$$\underline{\omega}_y \sim \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\delta v}{\delta z} \right) - \left(\frac{\delta v}{\delta x} \right) \right) \text{ und}$$

$$\underline{\omega}_z \sim \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\delta v}{\delta x} \right) - \left(\frac{\delta v}{\delta y} \right) \right)$$

Bei Potentialströmungen ist die Strömung rotorfrei; die Masseteilchen vollführen er so eine „kreisende Aloha-Bewegung“ es gilt also:

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

$$\underline{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0.$$

$$0 = \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \text{ und}$$

$$0 = \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \text{ und}$$

$$0 = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Eine weitere wichtige Größe als Maß für die Drehung der Strömung über eine Fläche A ist die Zirkulation. Definiert ist Zirkulation Γ als Linienintegral der Geschwindigkeit über eine beliebig geschlossene Kurve im Strömungsfeld. Ob und in welchem Ausmaß sich Wirbel auf einem Gebiet A befinden, kann über die Zirkulation bestimmt werden.

Mit Hilfe des Stokes'schen Integralsatzes lässt sich der Zusammenhang von Drehung und Zirkulation beschreiben. Für Potentialströmungen ist die Zirkulation immer Null, wenn keine Festkörper oder Singularitäten miteingeschlossen wurden. Über die Zirkulation lassen sich Wirbelstärke und Auftriebskräfte berechnen.

In der Potentialtheorie werden Strömungsfelder mittels Stromlinien dargestellt. Wenn Kontinuität herrscht ($0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$) und das ist hier natürlich der Fall, ist die Stromlinie eine sehr anschauliche Metapher für die Strömungswirklichkeit um einen Körper in der Art, dass sie die Tangenten der vektoriellen Hauptströmungsrichtung graphisch darstellt. In stationären Strömungen repräsentieren die Stromlinien die Teilchenbahnen. Ausgenommen an Staupunkten, an denen sich mehrere Stromlinien treffen können, schneiden sich Stromlinien nicht, da an einem Punkt nicht gleichzeitig zwei Geschwindigkeiten herrschen können. Stromlinien sind also fiktive Konstrukte und dennoch kommen sie uns alltäglich vor. Wie selbstverständlich rauschen auf der abendlichen Wetterkarte Geschwindigkeits-Pfeile auf Stromlinien über Isobaren und Temperaturfelder. Das Auge hat sofort verstanden, was Strömungen und Potentiale zu bedeuten haben.

Stromlinien sollen also mit einem Pärchen aus zwei sehr nützlichen Funktionen, einerseits der Stromfunktion Ψ und einer ihr

mathematisch sehr verwandten Potentialfunktion Φ beschrieben werden. Der auf den ersten Blick vielleicht umständlich erscheinende Ansatz über die Stromfunktion und eine auf dieser orthonormal abbildbaren Potentialfunktion, bringt auf den zweiten Blick tatsächlich Klarheit in die Argumentation.

Betrachten wir Strömungsgrößen ρ, c, u, v, w , so werden die Stromlinien (in der ebenen Euler-Betrachtungsweise: x, y) durch genau diese Stromfunktion $\Psi = \text{konst}$ beschrieben. Für die Komponenten u und v der Geschwindigkeit $\underline{c}(u,v)$ schreiben wir:

$$\begin{array}{llll} \text{In x-Richtung:} & u = \delta\Psi/\delta y & \text{sowie: } u \delta y = \delta\Psi & \text{und} \\ \text{in y-Richtung:} & v = -\delta\Psi/\delta x & \text{sowie: } v \delta x = -\delta\Psi & \end{array}$$

Dieser Ansatz ist sehr leistungsfähig und erfüllt die oben angeführten Erhaltungssätze. Wir setzen die Stromfunktion ($u=\delta\Psi/\delta y$) jetzt in die Kontinuitätsgleichung $0=\delta u/\delta x + \delta v/\delta y$ ein:

$$0 = \delta u/\delta x + \delta v/\delta y = \delta^2\Psi/\delta x\delta y - \delta^2\Psi/\delta x\delta y = 0$$

Wir hatten Rotorfreiheit gefordert, also: $0 = \delta v/\delta x - \delta u/\delta y$ und als eine Definition der Potentialströmung behandelt. Auch hier ersetzen wir die Geschwindigkeitskomponenten in der Beziehung in x-Richtung ($u=\delta\Psi/\delta y$), sowie in y-Richtung ($v= -\delta\Psi/\delta x$) und erhalten die als Laplace-Gleichung bekannte Form:

$$\delta^2\Psi/\delta x^2 - \delta^2\Psi/\delta y^2 = 0 = \Delta\Psi$$

Die Änderung der Stromfunktion ist Null, die Stromfunktion selbst ist konstant. In unserem Definitionsfall zumindest¹⁷. Potentiale sind Skalarfunktionen, deren Ableitung nach einer Koordinate eine physikalische Größe angibt, wir erinnern uns an die Wetterkarte oben.

¹⁷Ist die Änderung der Stromfunktion ungleich Null, also $(\delta^2\Psi/\delta x^2 - \delta^2\Psi/\delta y^2) = D(x,y,t)$ eine orts- und zeitabhängige Funktion („Diffusionsterm $D(x,y,t)$ “), erhalten wir eine als „POISSON-Gleichung“ bekannte Form.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

Ist eine Strömung wirbelfrei, so ergeben sich die Geschwindigkeitskomponenten der Strömung aus dem Gradienten der Feldfunktion. Die Potentialfunktion $\Phi = \Phi(x, y)$ zeigt demnach das Geschwindigkeitspotential des Vektorfeldes an, falls für die Geschwindigkeit \underline{v} gilt:

$$\underline{v} = \text{grad}\Phi.$$

Die Potentialfunktion fragt nach der Veränderlichkeit (Gradient) der Geschwindigkeit der (Strömungs-) Elemente in einem Strömungsfeld.

Für das Potential Φ gilt also: $\text{grad } \Phi = \{u, v\} = \{(\delta\Phi/\delta x), (\delta\Phi/\delta y)\}$

Potentialfunktion Φ und Stromfunktion Ψ stehen senkrecht auf einander. Dieser Zusammenhang zwischen den Ableitungen der Potentialfunktion Φ und jener der Stromfunktion Ψ wird durch eine als Cauchy-Riemann-Differentialgleichung bekannte Form beschrieben.

$$\delta\Phi/\delta x = \delta\Psi/\delta y \quad \text{und} \quad \delta\Phi/\delta y = -\delta\Psi/\delta x$$

Potentialfunktion Φ und Stromfunktion Ψ bilden ein orthogonales Kurvennetz:

$$\text{grad } \Phi \cdot \text{grad } \Psi = 0,$$

$$\text{also: } \delta^2\Phi/\delta x^2 + \delta^2\Phi/\delta y^2 = 0 = \Delta\Phi$$

Auch die Änderung der Potentialfunktion ist Null und die Potentialfunktion selbst ist damit konstant. Die Potentialtheorie ist unbequem, nicht besonders beliebt aber elementar. Die gesamte geschlossenanalytische, die klassische Strömungsmechanik, ist mit der Potentialtheorie herleitbar. Alle Wirbelmodelle, die (Wirbel-) Sätze von Thomson und Helmholtz und auch der so überaus nützliche (Wirbel-) Satz von Biot und Savart basieren auf der speziellen Anwendung

(Strömungsmechanik) einer allgemeinen Feldtheorie. Angewandt auf die Elektrotechnik ist der Satz von Biot und Savart beispielsweise das elektrodynamische Prinzip! Wir sollten nicht müde werden, über die Universalität der Feldtheorie zu grübeln. Eine Herleitung elementarer Potential-Strömungen findet man in den klassischen Lehrbüchern zum Thema. Sehr anschaulich und elementar werden Potential- und Stromfunktion entwickelt in Siegloch [Siegloch] der auch auf die Superponierbarkeit der Elementarlösungen eingeht und die konforme Abbildung als Methode zur Analyse beliebiger Profilkonturen erörtert. Nützlich sind in diesem Zusammenhang die potentialtheoretischen Ursachen und Zusammenhänge mit der klassischen Wirbeltheorie in [Tham-08]. Um die Induktionswirkungen eines Lagrange Kohärenten Objekts zu berechnen, schauen wir auf eine äußerst elegante Schreibweise der Elementarlösungen der Potentialströmung: Zur Berechnung eines jeden Geschwindigkeitspotentials wird die zwei-dimensionale Betrachtungs-ebene als komplexe Zahlenebene aufgefasst, in der der Wert des Potentials als Realteil einer Funktion F dargestellt wird:

$$F(z) = \Phi(x,y) + i\Psi(x,y) \quad \text{mit } z = x + i y$$

Die Funktion F ist das komplexe Geschwindigkeitspotential mit den beiden Geschwindigkeiten u und v ,

$$\text{also: } u = \delta\Phi/\delta x \quad \text{und } v = \delta\Phi/\delta y$$

Die komplexe Geschwindigkeit ist dann: $w = u - i v = dF/dz$.

Wir werden nun den Ansatz über das komplexe Geschwindigkeitspotential für die Beschreibung der Induktionswirkungen im dreidimensionalen Strömungsfeld verwenden¹⁸. Das innere Milieu des hier

¹⁸ Wirbelfaden	$F(z) = (\Gamma / 2 \pi) i \ln(z)$	$u = \Gamma x / (2\pi x^2 + y^2)$ und $v = \Gamma y / (2\pi x^2 + y^2)$
Parallelströmung	$F(z) = w z$	$w = u - i v$. folgt $F(z) = z(u - i v)$
Quellen	$F(z) = (Q / 2\pi) \ln(z)$	$u = Q x / (2\pi x^2 + y^2)$ und $v = Q y / (2\pi x^2 + y^2)$

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

betrachteten Lagrange Kohärenten Objekts folgt einerseits den Annahmen der Wirbelsätze Helmholtz's, andererseits sei das LCO fähig ein dreidimensionales Strömungsfeld mit „Induktionswirkungen zu überziehen“. Betrachten wir hierzu das Modell eines einfachen zirkulationsbehafteten Objekts. In der Literatur¹⁹ finden wir für den kon-zentrischen Ansatz $z=r e^{i\vartheta}$ das komplexe Potential

$$W(z)=-i B \ln(z/a).$$

Es sei r der Radius des zirkulationsbehafteten Objekts, a und B sind Konstanten.

$$W(z) = -i B \ln(z/a) = -i B \ln((r e^{i\vartheta})/a) = + B \vartheta + i (- B \ln (r/a))$$

Der Realteil: $+ B \vartheta = \Phi(x,y)$ ist die Potentialfunktion

Der Imaginärteil: $+ i (- B \ln (r/a)) = i \Psi(x,y)$ ist die Stromfunktion

Diese Herangehensweise ist zielführend, weil wir uns ein Wirbel-Element als die infinitesimale Grundeinheit des Helmholtz-'schen Wirbelfadens vorstellen dürfen. Er ist eindimensional und zirkulations-behaftet. Für ein Wirbelfadenelement sind in der x - y -Ebene um einen Ursprung $r=0$ die Stromlinien $\Psi=\text{const}$ konzentrische Kreise und die Potentialfunktion $\Phi=\text{const}$ Strahlen vom Zentrum ebendort (mit $a=1$, mathematische Hilfskonstante).

Noch befinden wir uns mit dem Lagrange Kohärenten Objekt in einer Eulerschen Perspektive. In der körperfesten Notation (der Lagrangen Betrachtungsweise) werden wir den Ort des Ursprungs der Induktion ($r=0$) den Quellpunkt Q der Induktionswirkungen nennen, und den Wirkungsort A den Aufpunkt im (euler'schen) Strömungsfeld. Um

Potentialwirbel $F(z) = (\Gamma / 2 \pi) i \ln(z)$ $u = \Gamma x / (2\pi x^2 + y^2)$ und $v = \Gamma y / (2\pi x^2 + y^2)$
Dipol $F(z) = m/z$ $u = m (x^2 + y^2) / (x^2 + y^2)^2$ und $v = - m (2xy) / (x^2 + y^2)^2$

¹⁹ [Scha-13] Schade, H. (2013) Strömungslehre. De Gruyter Verlag. ISBN-13: 978-3110292213

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

genau dort die lokalen Geschwindigkeitskomponenten von $\underline{c}=(u,v)$ im Strömungsfeld zu ermitteln leiten wir das komplexe Potential ab:

$$\underline{c} = dW/dz$$

Die Ableitung des komplexen Potentials ist die Geschwindigkeit:

$$dW/dz = u(x,y) - i v(x,y).$$

$$dW/dz = (-i B/z) = (-i B) / (r e^{i\vartheta}) = (-B/r) \sin \vartheta - i (-B/r) \cos \vartheta$$

Realteil	u	=	$(-B/r) \sin \vartheta$
Imaginärteil	iv	=	$-i (-B/r) \cos \vartheta$

Die lokale, vektorielle Geschwindigkeit der Strömung $\underline{c}=(u^2+v^2)^{1/2}=(B/r)$ die aus der Induktionswirkung des Lagrange Kohärenten Objekts stammt, hat nur eine Umfangskomponente. Das haben wir schon oben gesehen: für die lokale Geschwindigkeit in der x-y-Ebene ist die Potentialfunktion $\Phi=\text{const}$ und für eine Stromlinie $\Psi=\text{const}$.

Bei dem hier betrachteten Modell eines Lagrange Kohärenten Objekts (im Sinne des Modells des Helmholtz'schen Potentialwirbelfadens) ist die Zirkulation Γ die antreibende Größe für die Induktionswirkung aus Quellpunkten Q zu einer (induzierten) Geschwindigkeit in Aufpunkten A. Stellen wir uns das Lagrange Kohärente Objekt nun aufgeschnitten als Kreisfläche vor. Für ein Element $d\vartheta$ auf dem Kreisumfang ist ein kleines Wegstück $dx=r d\vartheta$.

An dieser Stelle überführen wir das Wirbelfadenmodell mit dem Wirksamen Radius r in das Modell unseres Lagrange Kohärenten Objekts mit dem Radius R vom Quellpunkt zum Aufpunkt A der Induktionswirkung. Für die Zirkulation Γ entlang eines vollen Kreises 2π mit dem Radius $r=R$ kennen wir das Ringintegral $\oint \underline{c} dx = \Gamma$, bzw. die Zirkulation entlang dieses Kreises in Zylinder-koordinaten:

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

$$\Gamma = \oint \underline{c} \, d\underline{x} = \Gamma = \oint^{2\pi} (B/R) \, d\vartheta = (B/R)R \, 2\pi = 2\pi B$$

Die Zirkulation ist bemerkenswerter Weise konstant und unabhängig vom Radius R des Kreises am Entstehungsort der Induktionswirkung immer dann, wenn der dritte Wirbelsatz Helmholtz's gilt. Flechten wir also die Zirkulation in unsere Betrachtungen ein. Man kann nun herleiten, dass ein Lagrange Kohärentes (Wirbelfaden-) Objekt mit der Zirkulation Γ das komplexe Strömungspotential hat: $W(z) = -(i\Gamma/2\pi) \ln(z-z_0)/a$. Das kommt der Argumentation vor dem Hintergrund länglicher Objekte, unseren LCO eben sehr entgegen.

Das komplexes Strömungspotential: $W(z) = - (i \Gamma / 2\pi) \ln (z - z_0)$.

Für Zirkulationen $\Gamma > 0$ ist der Drehsinn des Wirbelfadens mathematisch positiv, und für $\Gamma < 0$ ist der Drehsinn des Wirbelfadens negativ. Damit wird in unserem potentialtheoretischen Modell die wichtige Eigenschaft der Pfadabhängigkeit (Lagrange) der Induktionswirkungen eines Lagrange Kohärenten Objekts abgebildet. Der aus dem funktionentheoretischen Ansatz stammende konstante Divisor $a=1$ diente nur der Dimensionierung. Die Zirkulationen Γ hat die interessante Dimension $\Gamma [m^2s^{-1}]$. In einer anderen Welt, der der reibungsbehafteten Welt der SPH-Simulationen²⁰, werden Fluide über Partikel formuliert. Vielleicht wird sich irgendwann herausstellen, dass diese Partikel in (Wechsel-) Wirklichkeit auch nichts anders sind als kleine Lagrange Kohärente Objekte; und ich füge hinzu: denen eine Zirkulation innewohnt. Für diesen Fall hätte man eine gute Argumentation zur Hand, weshalb man es für erforderlich hält, so genannte „künstliche Viskositäten“ einführen zu müssen. Bislang behilft man sich zu erklären, dass diese Partikelchen nicht von selbst rotieren sollen und deshalb von einer

²⁰ **Smoothed-particle hydrodynamics (SPH)**; deutsch: *geglättete Teilchen-Hydrodynamik*) ist eine numerische Methode, um die Hydrodynamischen Gleichungen zu lösen. Sie wird unter anderem in der Astrophysik, der Ballistik und bei Tsunami-Berechnungen eingesetzt. SPH ist eine Lagrange-Methode, d. h. die benutzten Koordinaten bewegen sich mit dem Fluid mit. SPH ist eine besonders einfach zu implementierende und robuste Methode.

fiktiven Viskosität passiviert werden müssen (die Viskosität ν hat die Dimension $\nu [m^2s^{-1}]$). Wir kommen außerdem zu dem Ergebnis, dass im Konzept der Potentialtheorie die Zirkulation für einen beliebigen Kreis um irgendeinen Ursprung nicht verschwindet, einfach, weil sie (die Zirkulation) unabhängig vom Radius R ist und somit ein Potentialwirbelelement überhaupt erst inmitten einer ansonsten wirbelfreien Strömung existieren kann. Das ist ein typisches (phänomenologisches) Anzeichen für die Existenz von Kohärenz eines diskreten Objekts hinsichtlich der Induktionswirksamkeit und letztlich seiner Strömungswechselwirklichkeit im Fluid.

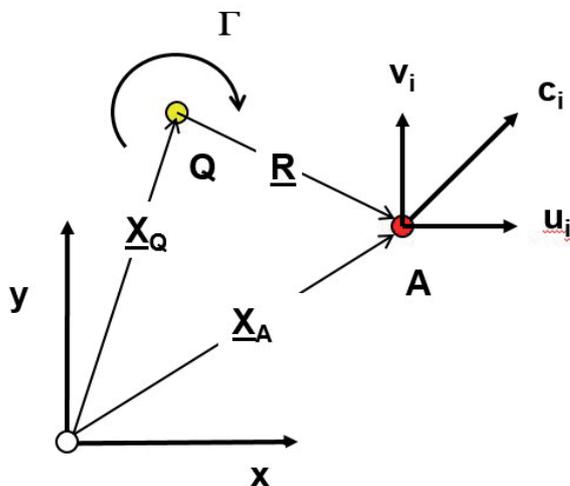


Abb.3: Induktionswirkung. Betrachtung im euler'schen 2D-Koordinatensystem. Von einem Quellpunkt Q wird im Abstand R eine Geschwindigkeit \underline{c} in einem Aufpunkt A induziert. (eigene Darstellung Mi. Felgenhauer 2020).

Kommen wir nun zu den konkreten Berechnungsgrundlagen für ein Modell und für eine Simulation des Induktionsgeschehens, das seine Ursache in der Wechselwirkung eines Lagrange Kohärenten Objekts mit seiner fluidischen Umgebung beschreibt.

Ziel unserer Überlegungen über Induktionswirkungen sind die Komponenten der durch das Lagrange Kohärente Objekt induzierten Geschwindigkeit \underline{c}_i im Feld. Gehen wir also den Weg über die Ableitung des komplexen Potentials und zwar unter der Berücksichtigung, dass nun die Zirkulation in der Form steht. Die Ableitung des komplexen Potentials W führt auf die Komponenten der lokalen Geschwindigkeit $u-i v=dW/dz$:

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

$$u - i v = dW/dz = d(- (i\Gamma / 2\pi) \ln (z - z_0)) / dz.$$

$$u - i v = - (i\Gamma / 2\pi) \cdot 1 / (z_P - z_Q)$$

$$u - i v = - (i\Gamma / 2\pi) \cdot 1 / ((x_P - x_Q) + i (y_P - y_Q))$$

$$u - i v = - (i\Gamma/2\pi) ((x_P - x_Q) - i(y_P - y_Q)) / ((x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2)$$

Mit $\underline{c}=u+iv$ führt das Trennen des Real- vom Imaginärteil auf die zwei Geschwindigkeitskomponenten²¹ für die Betrachtung in einer Ebene, die sowohl den Quellpunkt Q als auch den Aufpunkt A enthält:

$$u = - (\Gamma/2\pi) \cdot (- (y_P - y_Q)) / ((x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2)$$

$$v = (\Gamma/2\pi) \cdot ((x_P - x_Q)) / ((x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2)$$

Dies sind die Geschwindigkeiten, respektive die lokalen Komponenten der von einem Ort in der Strömung, dem Quellpunkt Q des Lagrange kohärenten Wirbelfadens aus, im Fluid induzierten Geschwindigkeit an einem Aufpunkt A ebendort. Die euler'schen Geschwindigkeitskomponenten u, v repräsentieren die im Abstand \underline{R} von einem singulären Quellpunkt Q ermittelbare induzierte Geschwindigkeit. Man beachte, dass die aus der Potentialtheorie stammende Funktion für $R=0$ nicht definiert ist. Diese Singularität ist in einem anschließenden numerischen Modell zwingend zu berücksichtigen. Ebenfalls dem Lösungsansatz einer vereinfachenden Modellbildung mit der Potentialtheorie geschuldet waren zunächst Betrachtungen im Zweidimensionalen. Für den 3D-Fall der induzierten Geschwindigkeit \underline{c} sind die lokalen Komponenten der von einem Ort, dem Quellpunkt Q $\{Q_x, Q_y, Q_z\}$ des Lagrange kohärenten Wirbelfadens aus, im Fluid induzierten Geschwindigkeit an einem Aufpunkt A $\{A_x, A_y, A_z\}$ ebendort. Ortsvektoren \underline{R} von Quellpunkten zu Aufpunkten A, wie ich sie in oben verwende, vereinfachen erneut die Schreibweise.

²¹Dies bestätigt den Ansatz für die vektorielle induzierte Geschwindigkeit \underline{v}_i in einem Aufpunkt A nach dem Biot-Savart'schen Gesetz für die horizontale x-Komponente $u=v_i \cdot \underline{v}_i$ und die vertikale y-Komponente $v=v_i \cdot \underline{v}_i$, wie er in der einschlägigen Literatur gerne vorgetragen wird.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

Mit $R^2=(x_P-x_Q)^2+(y_P-y_Q)^2+(z_P-z_Q)^2$ folgen die Komponenten der durch das Lagrange Kohärente Objekt induzierte Geschwindigkeit $\underline{c} \{u,v,w\}$ Komponenten der induzierten Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned}u &= -(\Gamma/2\pi R) (y_P - y_Q) / R \\v &= (\Gamma/2\pi R) (x_P - x_Q) / R \\w &= (\Gamma/2\pi R) (z_P - z_Q) / R\end{aligned}$$

mit: Geschwindigkeitskomponenten	u,v,w	[m/s]
Zirkulation an LCO Quellpunkten	Γ	[m ² /s]
Wirbelstärke an Quellpunkten	Ω_0	[m/s]
Abstände: Quellpunkt, Aufpunkt	x,y,z,R	[m]

Jede (beliebige) vektoriell richtungsabhängige Induktionswirkung \underline{s} Lagrange Kohärenter (Erzeugender-) Systeme geht in der Natur aus beobachtbaren Ursachen-Phänomenen hervor, die ihrerseits richtungsabhängig sind, etwa Einschnürungen, die auf eine Zirkulation in einer bestimmten Richtung führen. In der Realität und auch in dem hier als Simulationsmodell diskutierten Fall einer (artifiziellen) Strömungswirklichkeit, sind die Zirkulationen Γ , bzw. die Wirbelstärke Ω_0 in den Querschnitten längs der zentralen Achse des Lagrange Kohärenten Objekts induktionsrelevant und ursächlich für jene abstrakten vektoriellen Induktionswirkungen \underline{s} des Erzeugendensystems, die pfadabhängig sind und mit einem Richtungsvektor $\underline{\gamma}=\gamma\underline{e}_i$ korreliert. Der Richtungsvektor $\underline{\gamma}$ ist dimensionslos. Die lokalen (lagrange-veränderlichen) Richtungen können dem Lagrange Kohärenten Objekt einbeschrieben werden derart, dass $\underline{\gamma}$ lokal variiert:

$$\text{Richtungsvektor} \quad \underline{\gamma} = \gamma\underline{e}_i = (\gamma_1 \underline{e}_{i1}, \gamma_2 \underline{e}_{i2}, \gamma_3 \underline{e}_{i3}).$$

Die Induktionswirkung \underline{s} ist demnach ein Tensor. Um einen Tensor zahlenmäßig darzustellen (Euler), bedient man sich des lokalen,

körperfesten Koordinatensystem (Lagrange). Im Falle der im Feld verteilten Induktionswirkungen, die ursächlich aus der Existenz eines Lagrange Kohärenten Systems herrühren, verwenden wir lokale, karthetische Koordinatensysteme. Ein karthetisches Koordinatensystem ist seinerseits durch einen lokalen Ursprung und drei aufeinander senkrecht stehenden Einheitsvektoren $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ gegeben. Drei aufeinander senkrecht stehende Einheitsvektoren \underline{e}_i nennt man eine orthonormierte Basis. Karthetische (Euler-) Koordinatensysteme dienen in der analytischen Geometrie zur zahlenmäßigen Beschreibung von Punkten im Raum, etwa den vektoriellen Induktionswirkungen \underline{s} .

$$\text{Vektor mit der Basis } \underline{e}_i: \quad \underline{s} = s_1 \underline{e}_1 + s_2 \underline{e}_2 + s_3 \underline{e}_3 = s_j \underline{e}_j$$

Man unterscheidet dabei begrifflich zwischen den Komponenten und den Koordinaten eines Vektors. Der Vektor $s_x \underline{e}_x$ ist die x-Komponente von \underline{s} (entsprechend $s_1 \underline{e}_1$) und die Größe s_x ist die x-Koordinate von \underline{s} in dem entsprechenden Koordinatensystem. Die Komponenten des Vektors \underline{s} sind also selbst Vektoren; die Koordinaten des Vektors \underline{s} sind demnach keine Vektoren! Diese (Koordinaten eines Vektors) sind eine Funktion der Basis des gewählten Koordinatensystems. Betrachten wir einen Punkt im (dreidimensionalen) Raum, hängen die Koordinaten dieses Punktes auch vom Ursprung des Koordinatensystems ab. Die Koordinaten eines Punktes im Raum heißen dann Ortsvektoren, sie sind also keine Vektoren im engeren Sinne²². Relevant im Falle „einstufiger Tensoren“, sind deren transformatorischen Eigenschaften. Ein Tensor T beispielsweise bildet einen Vektor \underline{b} auf einen anderen Vektor \underline{a} selbst-referentiell ab, also: $a_j = T_{ij} b_j$, etwa die abstrakte Induktionswirkung in einem Strömungsfeld. Es interessiert genau jener Übergang von einer Lagrange hin zu einer Euler'schen Betrachtung, ursächlich der richtungsabhängigen, selbstreferentiellen

²² An dieser Stelle sollen keine Rechenregeln für Tensoren aufgeschrieben werden; wir benutzen Tensoren und andere mathematische Vektorkonstruktionen nur operativ und wenig allgemein. Anschließend an die notwendigsten Begriffe, sei auf die einschlägige Literatur verwiesen.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

Transformation einer Feldgröße auf das Feld selbst. Wie wir sogleich sehen werden, enthalten die Lagrange Kohärente Systeme beschreibenden mathematischen Konstrukte Ortskoordinaten- und Richtungsinformationen und sind selbst ausgesuchten (topologieerhaltenden) Transformationen zugänglich. Es handelt sich (zum Glück) um „freundliche“ homomorphe Transformationen, denn mit einem Seitenblick auf die unsere, die Lagrange Kohärenten Objekte definierenden Helmholtz'schen Wirbelsätze, sind lediglich affine Abbildungen zulässig; Transformationen also, die keine topologischen Gestaltänderungen vollziehen, bei denen Durchdringungen auftauchen, noch Löcher entstehen. Wir sprechen dann von Transformationen, die das Geschlecht des topologischen Systems nicht ändern. Eine interessante Analogie bilden Taut und Knoten. Darauf komme ich später noch einmal zurück.

Gehen wir nun von irgendeiner abstrakten Induktionswirkung \underline{s} zu der konkreten, von einem LCS induzierten Geschwindigkeit \underline{c} : die Induktionswirkung des Lagrange Kohärenten Erzeugendensystems im Strömungsfeld sei die ebendort existierende induzierte Geschwindigkeit \underline{c} . Also ist \underline{c} die induzierte Geschwindigkeit in den Aufpunkten A und dies im Sinne einer Induktionswirkung \underline{s} und $\underline{\gamma}$ der Richtungsvektor kohärenter Objekte, die zusammen ein Lagrange Kohärentes System (LCS) bilden und \underline{q} der Ortsvektor mit den Koordinaten aller Quellpunkte Q_k , an dem das Lagrange System als zusammenhängendes, kohärentes Gebilde existiert. Das ist in der schematischen Skizze oben bereits dargestellt.

$$\underline{c}_i = \gamma_{ik} \underline{q}_k \quad \text{mit } \underline{\gamma} = \gamma_1 \underline{e}_1 + \gamma_2 \underline{e}_2 + \gamma_3 \underline{e}_3 = \gamma_j \underline{e}_j$$

Ich gehe in dieser Phänomenologie ferner von der vereinfachenden Vorstellung aus, dass das Lagrange Kohärente System (überall) dilatationsfrei sei. Die Freiheit von plastischer Verformbarkeit bedeutet in unserem abstrakten Zusammenhang, dass sich die namensgebende Kohärenz nicht allein auf die, als über das Betrachtungsgebiet

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

(global) konstant angenommene Wirbelstärke Ω des Systems, erstreckt, sondern auch für die lokal am LCS herrschende Zirkulation Γ gilt. Nach Helmholtz ist die Betrachtung einer auf Deformation beruhenden Kontinuität, also einer kausalen Flächenbeziehung, die eine Dilation bei Streckung oder einer Kontraktion bei Stauchung eines Wirbelsystems beschreibt, definitorisch geboten. Den durchaus sehr interessanten Fall einer deformationsabhängigen Zirkulation werden wir hier also nicht betrachten, so dass ich Dilation, Verzerrung, Stauchung in einem Beobachtungsgebiet in dieser Betrachtung ausschließen möchte. Gleichsam werden wir (quasi-) affine Transformationen durchführen.

Affine Verschiebungen und Verzerrungen führen durchaus auf Variationen der Länge eines Lagrange Kohärenten Objekts. Die Koordinaten benachbarter Quellpunkte können sich dabei ändern, aber die Zahl der zirkulationsbehafteten (Koordinaten-) Orte bleibt in der Abbildung erhalten. Die Diskretisierung der Induktionsquellen variiert von Modell zu Modell, ist aber innerhalb einer (Analyse-) Kohorte von Transformierten konstant. Wir kennen diese Argumentation aus der tradierten Definition der Stromlinien. Zwar ist die Modelleigenschaft der Dilationfreiheit physikalisch nicht hinterlegt, bietet sie aber für die Simulation abstrakter, synthetischer Lagrange Kohärenter Objekte die Chance der Vergleichbarkeit einer Struktur mit ihrer Transformierten. Sagen wir es so: Im Simulationsmodell sei das richtungsabhängige Erzeugendensystem LCO materiell und durch die Wirkung äußerer Kräfte deformierbar, aber eindimensional: ein Faden im Raum. Der Leser möge sich das fluidische Lagrange Kohärente System als strömungsmechanisches Analogon der eindimensionalen elastischen Linie oder eine Saite im dreidimensionalen Raum der klassischen Kontinuumsmechanik vorstellen. Zugunsten wohlwollend strömungsmechanisch- phänomenologischer Metaphern.

Das numerische Modell

Das geometrische Modell in dem ein rein synthetisches (Wechsel-) Wirkungsgeschehen stattfindet und das numerische Modell, das die physikalischen und mathematischen Zusammenhänge in Code umsetzt, fußen ausschließlich auf der oben ansatzweise dargelegten Phänomenologie Lagrange Kohärenter Systeme.

Die Simulation realisiert lediglich das numerische Modell. Sie beginnt in einem Vorprozess, der Rand- und Eingangsbedingungen bearbeitet und das Lagrange Kohärente System determiniert. Dieser Vorprozess kann graphische Elemente enthalten. Die Simulation selbst (runtime) steuert keinerlei Graphik an und ist weitestgehend von Dokumentations- und Sicherungs-Routinen befreit. Hier wird das Strömungsfeld determiniert. Ein Nachprozess evaluiert die Feldgrößen, stellt sie dar, leitet Integral- und Mittelwerte ab und stellt diese ebenfalls dar. Wahlweise werden die Berechnungsergebnisse in einem oder mehreren Ergebnisfiles gespeichert. Prinzipiell erfolgt die Simulation über die Induktionswirkungen Lagrange Kohärenter Systeme in einem dreidimensionalen Strömungsfeld. Dazu stehen die Koordinaten (x_i, y_i, z_i) von Punkten K_i die selbst Element eines LCS sind, als ein Polygon geordnet an, nachfolgend LCS-Polygon genannt. Die Lagrangen Ortsvektoren S_j verbinden die euler'schen Knotenpunkte K des LCS-Polygons. Diese könnten nun in ein dreidimensionales Strömungsfeld eingetragen werden, was in der Simulationspraxis aber nicht erfolgt. Gleichwohl werden im Vorprozess der Simulation aus den euler'schen Koordinaten und ihren vektoriellen Verknüpfungen unmittelbar drei linear unabhängige (polygonartige) Konstrukte berechnet, die jeweils die Komponenten $(r_{x_i}, r_{y_i}, r_{z_i})$ eines lokalen dreidimensionalen Richtungsvektors $\underline{\gamma}_i$ enthalten.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

	Eine SIMULATIONS-KAMPAGNE unter FlowLab²³
VOR- PROZESS	Modellbildung
	Strömungsraum beschreiben und fluidmechanische Randbedingungen
	LCS als Polygon aus externer Datei laden. LCS-Topologie festlegen und im Strömungsraum ansiedeln. Richtungs-Vektoren im Feld ermitteln.
RUN Time	Simulation
	Berechnung der lokalen Induktionswirkungen Lagrange Kohärenter Strukturen im Strömungsraum; als 3D Komponenten-Vektorfeld.
NACH- PROZESS	Ergebnisse
	Resultierende Felder, Integral- und Mittelwerte.
	Graphische Darstellung der Simulation im Strömungsraum. Sichern der Ergebnisdaten in externen Dateien.

Das numerische Modell „kennt“ die formale Gestalt des Richtungsvektors, weist sie aber nicht aus. Vielmehr werden im Vorprozess der Simulationsrechnung aus den die lokalen Richtungen enthaltenden (Lagrange) „polygonartigen“ Konstrukten drei vektorielle Richtungsfelder \underline{r}_X , \underline{r}_Y , \underline{r}_Z (Euler) generiert.

Vorprozess:

- Knoten $K_i (x_i, y_i, z_i)$ und
- Vektoren $S (K_m, K_{m+1})$ und
- Richtungen $\underline{\gamma}_i (r_{x_i}, r_{y_i}, r_{z_i})$;
mit $\underline{\gamma} = \gamma_1 \underline{e}_1 + \gamma_2 \underline{e}_2 + \gamma_3 \underline{e}_3 = \gamma_j \underline{e}_j$

²³ FlowLab ist eine Sammlung von Routinen von, Prozeduren und Programmen zur Fluidmechanik in proper Code. http://bmoto.de/Flowlab_intro.html

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

Die separierten Felder enthalten nun alle Informationen, um die (Geschwindigkeits-) Induktionswirkungen $\underline{c}_i = \gamma_{ik} \underline{q}_k$ an beliebigen Aufpunkten P aus Quellpunkten Q in einem Strömungsraum zu superponieren. Natürlich sind die Aufpunkte A nicht beliebig im Sinne von willkürlich, sondern eine determinierte Schar von Punkten, die sich in der Reichweite ε der Quellpunkte befinden. Das geht aus unserer Tensorbeschreibung nicht unmittelbar hervor; erst dann, wenn das „Wechselwirkungsgesetz“ der Geschwindigkeitsinduktion Anwendung findet, also während der lokalen Berechnung, ist auch die Reichweitenrelation der Induktionswirkungen von Belang.

Die Reichweite ε ist somit ein Modellparameter der Simulation und spannt einen lokalen Raum um den Quellpunkt Q auf. Die Reichweite ε korreliert den (wirksamen) Radius $r = ((x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2)^{1/2}$ der oben bereits angeführten Komponenten der induzierten Geschwindigkeiten aus dem komplexen Potential.

Die lokal von einem Lagrange Kohärenten Wirbelfaden induzierte Geschwindigkeit $\underline{c} \{u, v, w\}$, ist somit:

$$\underline{c}: \{u, v, w\} = \{-(\Gamma/2\pi r)(y_P - y_Q)/r, (\Gamma/2\pi r)(x_P - x_Q)/r, (\Gamma/2\pi r)(z_P - z_Q)/r\}$$

Die durch ein Lagrange Kohärentes System induzierte Geschwindigkeit $\underline{c} \{u, v, w\}$ ist eine kumulative Größe. Es ist daher keinesfalls ratsam, vorschnell und letztendlich die resultierende Geschwindigkeit, die sich aus der geometrischen Addition der Komponenten ergibt, zu betrachten. Im Gegenteil. Durch die Pfadabhängigkeit des Erzeugendensystems der Induktionswirkung einerseits und dem Reichweitenparadigma andererseits, kommt es zu „Auslöschungen“ der kumulierbaren Komponentengeschwindigkeiten. Diese sind auf der Modell-Ebene der Simulation von rein mathematischer Natur, sprich: kommen sich zwei Lagrange kohärente Wirbelfäden mit ihren richtungsabhängigen Induktionswirkungen nur genügend ε -nahe, tilgen sie sich lokal auf, oder: sie verzehren sich.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

Wir sehen hier eine physikalische Wechselwirklichkeit des Systems. Es ist nicht die physikalische Realität; so die hier dargelegte Phänomenologie lokaler Lagrange Kohärenter Systeme. Diese Phänomenologie über die Induktionswirkungen Lagrange Kohärenter Wirbelfadensysteme bestreitet eine (reale) Auslöschung und behauptet stattdessen, dass das (Wirbelfaden-) System lediglich in einem beschreibbaren energetischen Zustand verharrt. Eine Mode, ein Zustandsgebaren, ein Attraktor. Ändert sich eine Anordnung und Gestalt eines Lagrange kohärenten Systems in eine andere topologiegleiche Gestalt, unterscheiden sich auch die Induktionswirkungen des Erzeugendensystems. Die Energie im Feld und um das Lagrange Kohärente System herum, geht bei dieser homotopen²⁴ Gestaltänderung nicht verloren, sondern taucht nur mehr oder weniger im Strömungsfeld auf. Sie ist auf eine sonderbare Weise im Feld verschachtelt.

Dabei korrelieren die dreidimensional beschriebenen Knoten K des Polygons in unserer Modellvorstellung die zu Induktionswirkungen fähigen Quellpunkte Q eines synthetischen Lagrange Kohärenten Systems in einem abstrakten Strömungsraum. Der Strömungsraum selbst besitzt – wie wir das in einer fluidmechanischen Simulation erwarten - an den Systemgrenzen, den (sechs an einem kubischen Strömungsraum existierenden) Modell-INLets und Modell-OUTLets definierte Randbedingungen an den Systemrändern, wie Geschwindigkeiten v_∞ , Massenströme, (System-) Drücke usw.

Betrachten wir nun im Vorfeld der Simulation die Konditionen des modellierten Strömungsraumes und die erwartbaren Eigenschaften der hierin simulierten Lagrange Kohärenten Systeme, so legen meine theoretische Untersuchungen aus der näheren Vergangenheit den Schluss nahe, dass die Verteilung von Induktionsquellen im Raum hinsichtlich ihrer Induktionswirkungen nicht beliebig sein kann. Beobachtet man vor dem Hintergrund der Gültigkeit des aus einer

²⁴ In der Topologie ist eine Homotopie (von griechisch ὁμός *homos* ‚gleich‘ und τόπος *tópos* ‚Ort‘, ‚Platz‘) eine stetige Deformation zwischen zwei Abbildungen von einem topologischen Raum in einen anderen.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

allgemeinen Feldtheorie stammenden Gesetzes von Biot und Savart, Induktionsquellen im Raum, so kommt man zu der durchaus erwartbaren Erkenntnis, dass mehr oder weniger nah benachbarte Quellen das Strömungsfeld unterschiedlich organisieren [Fel-20].

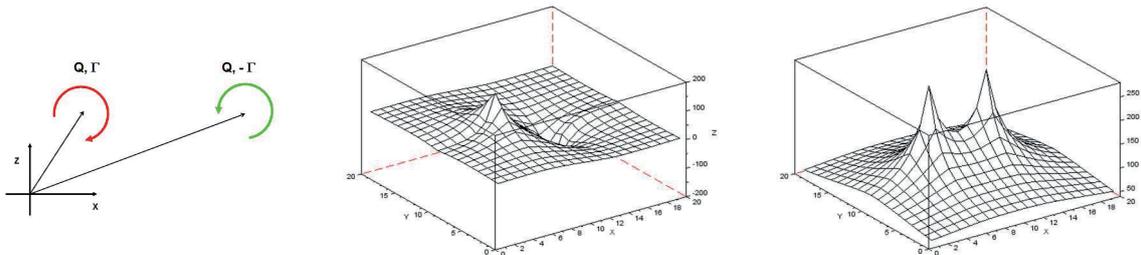


Abb.4a: Quellpunkte und LANG-reichweitige Wechselwirkung zweier Lagrange kohärenter Systeme in der in der (x-z)-Ebene des Strömungsraums. Die Zirkulationsrichtungen sind verschieden. Induzierte Geschwindigkeit, Komponente u (Mitte). (rechts) Resultierende induzierte Geschwindigkeit c (eigene Darstellung Mi. Felgenhauer 2020).

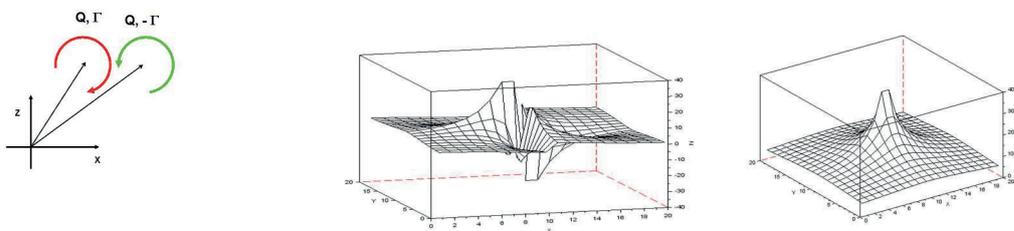


Abb.4b: Quellpunkte und KURZ-reichweitige Wechselwirkung zweier Lagrange kohärenter Systeme in der in der (x-z)-Ebene. Die Induktionswirkungen heben sich hier (scheinbar) auf. (eigene Darstellung Mi. Felgenhauer 2020).

Der Aufsatz [Fel-20]²⁵ untersucht die Verteilung von Induktionswirkungen Lagrange Kohärenter Objekte in der x-z-Schnittebene. Die verwendeten potentialtheoretischen Computermodelle erklären die Wirkung unterschiedlicher Wirbel-Topographien auf die in der Ebene induzierten Geschwindigkeit theoretisch. LANG-reichweitige Induktionswirkungen organisieren das Strömungsfeld anders als KURZ-reichweitige Induktionswirkungen. Ziel der Untersuchung sind Verteilungen maximaler Impulswirksamkeit in einer Schnittebene. Wir werden ein dieserart auf dreidimensionalen Berechnungen erweitertes numerisches Simulationsmodell für unsere nachfolgenden Analysen einsetzen. Eine vergleichende energetische Betrachtung von homotopen Lagrange Kohärenten Systemen ist seitens einer Simulation der Wechselwirkungen im Strömungsfeld überhaupt kein Problem immer dann, wenn das Verhalten konform ist zu den Wirbelsätzen Helmholtz's. In der Analysepraxis rechnet man lediglich die gleiche Topologie zweimal; einmal vor und einmal nach der topologiegleichen Gestaltänderung der Wirbelstruktur.

Das hier vorgestellten Modell behandelt nicht die naturgetreue Darstellung der erlebbaren Realität, sondern eine „synthetische Wirklichkeit“ und auch nur eine einzig intensive²⁶ Größe, die induzierte Geschwindigkeit c im artifiziiellen Strömungsfeld, insbesondere ihre Komponenten u , v und w , die aus dem komplexen Potential hergeleitet werden. Die Geschwindigkeit und damit auch ihre Komponenten im Raum sind, wie alle intensiven Größen, superponierbar und kumulativ. Maßgebend für die induzierte Geschwindigkeit ist die Zirkulation Γ die, pfadabhängig und ebenfalls von der Größe des betrachteten Systems unabhängig, intensiv und skalierbar ist. Aus der induzierten Geschwindigkeit ist die (ihrer Art nach extensive) kinetische Energie innerhalb der Systemgrenze der betrachteten

²⁵ [Fel-20] Felgenhauer, M. (2020) Die Verteilung von Induktionswirkungen Lagrange Kohärenter Objekte. Zur Topographie und Kondition von Geschwindigkeitsfeldern. GRIN Verlag, München. ISBN 9783346142146

²⁶ Eine intensive Größe ist eine Zustandsgröße, die sich bei unterschiedlicher Größe des betrachteten Systems nicht ändert. Das Gegenstück zu den intensiven Größen sind die extensiven Größen, wie beispielsweise Teilchenzahl, Volumen, Energie und Entropie, welche sich mit der Größe des Systems ändern (Skalierung). Wikipedia.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

synthetischen Lagrange Kohärenten Struktur von Interesse. Wir erhalten in energetischen Betrachtungen nicht unmittelbar richtungsabhängige Informationen; anders als bei dem pfadabhängig induzierten Impuls p und der induzierte Transport-Leistung L .

Impulsmächtigkeit	$p \sim c$
Kinetische Energie	$E \sim c^2$
Transportleistung	$L \sim c^3$

Wir sehen, durch das Modell vermittelt, dass in einem Energieäquivalent (E/dm) die Richtung der diese kinetische Energie induzierenden Geschwindigkeit verschwinden muss immer dann, wenn sie quadratisch in einer mathematischen Form steht. Die dem synthetisch Lagrange Kohärenten System innewohnende Induktionswirklichkeit besitzt eine (ebenfalls synthetische) „Impulsmächtigkeit“, die für topologisch gleiche Strukturen gelegentlich verborgen bleibt, manchmal aber „verwirklicht“ wird; und ich füge hinzu: unabhängig von einer im Modell verwandten Metrik, aber in Abhängigkeit von der geometrischen Gestalt der Struktur. Diese skalierbar, gestaltabhängige Wechselwirklichkeit des synthetischen Lagrange Kohärenten Systems, sLCS stellt den Kern hiesiger Überlegungen.

Spiralige Systeme

Das oben betrachtete Schnittebenenmodell beschreibt Induktionswirkungen als lokale zweidimensionale Phänomene. Doch genauso, wie wir nur wenig über Seile erfahren, wenn wir nur ihren Querschnitt betrachten, sind die Erkenntnisse über Lagrange Kohärente Systeme nicht hinreichend aufschlußreich, solange wir das Wechselwirkungsgeschehen um diese Strukturen nicht im dreidimensionalen Raum beobachten.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

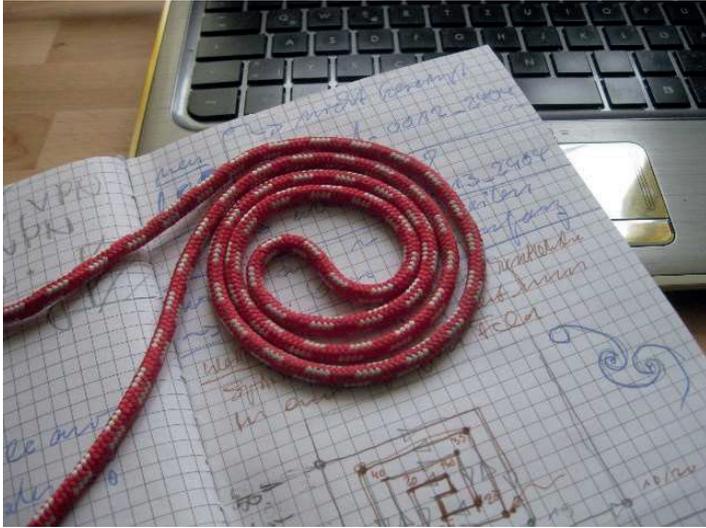


Abb. 5:
Spiraliges System;
vermutlich ein LCS.

(eigene Darstellung Mi. Felgenhauer 2020).

Die herrschende Lehrmeinung vertritt in erster Linie drei weitestgehend anerkannte Wirbelmodelle: den Potential-Wirbel, den Festkörper-Wirbel und den Rankine-Wirbel.

Der Potentialwirbel ist das Paradebeispiel einer rotorfreien Potentialströmung. Die Fluidelemente des Potentialwirbels „wirbeln eben gerade nicht“ um ein Zentrum herum, sondern machen eine (richtungsgleiche ALOA-) Bewegung: $\text{rot } \underline{u}=0$. Betrachten wir vom Zentrum des ebenen Wirbels aus den Radius r bis hin zum Rand R , soll uns hier lediglich das Geschwindigkeitsprofil auf dieser endlichen Fläche interessieren.

In einer rotorfreien Potentialströmung zeigen die Fluidelemente immer in die gleiche Richtung, was weitreichende Konsequenzen hat: die Winkelgeschwindigkeit ω ist im Zentrum ($r=0$) am größten, am Rand ($r=R$) klein²⁷. Die Geschwindigkeit und der Druck sind wieder komplementär.

²⁷ Weil die Rotation „rot“ des Geschwindigkeitsfeldes verschwindet, zeigen die Fluidelemente trotz ihrer kreisenden Bewegung im Wirbel immer in dieselbe Richtung. Wenn man mathematisch genau ist, gilt die obige Gleichung allerdings nur außerhalb des Zentrums, also für während bei Mitnahme des Zentrums gilt, mit der zweidimensionalen Diracschen Deltafunktion und der Wirbelstärke. <https://physik.cosmos-indirekt.de/>

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

Der Druckgradient ist beschrieben durch: $\{c_p(r,t)=1-(v(r)/v_\infty)^2\}$. Wir finden am Rand die hohen Drücke, im Zentrum die kleinen Drücke. Für manche Fragestellungen der Energiekopplung wäre das eine optimale Randbedingung, weil wir in der Fluidbewegung den größten mechanischen Output genau in der Übertragungszone am Rand der „Walze“ finden. Aber leider ist die Welt der Wirbelmodelle eine Scheibe und die tradierten Wirbelmodelle finden nur in der Ebene eine geschlossene Antwort auf die Frage nach der Impuls- und Energieübertragung.

Festkörperwirbel. In einem ebenen Festkörperwirbel bewegen sich alle Fluidelemente mit gleicher (Winkel-) Geschwindigkeit $\underline{c}=2\omega$ auf konzentrischen Bahnen um ein gemeinsames Zentrum. Der Bierdeckel ist eine gute Metapher oder räumlich dann: die Gebetsmühle. So einfach und plausibel sie auch aussieht, die Gebetsmühle, als Modellvorstellung ist sie kritisch. Die Geschwindigkeit der Masseteilchen ist außen ($r=R$) am größten und im Kern ($r=0$) am geringsten, gleichzeitig wissen wir aus den Überlegungen oben, dass daraus folgt, dass der Druck außen am geringsten, im Innern aber groß ist und wir fragen uns: Warum funktioniert der Festkörperwirbel überhaupt?

Der Rankine-Wirbel ist viel universeller. Sein Namensgeber, William John Macquorn Rankine (*1820 in Edinburgh; †1872 in Glasgow) war ein schottischer Physiker und Ingenieur. Rankine-Wirbel stehen für ein Kombinationsmodell aus Potentialwirbelmodell und Festkörperwirbel. Der Rankine-Wirbel ist, anders als seine beiden Bestandteile, eine (sehr) nahe Lösung der Navier-Stokes-Gleichung. Der Rankine-Wirbel verbindet das Modell des Potentialwirbels im Außenbereich ($R < r < r_1$) mit dem Festkörperwirbelmodell im Zentrum ($r_1 < r < 0$). Das ist nicht sofort einsichtig.

Die Argumentation um Potential- und Festkörperwirbel impliziert, dass wir verstanden haben, was ein Wirbel ist: die Wirbelstärke Ω ist der rotatorische Anteil der Geschwindigkeit \underline{c} ; gleichzeitig verschwindet die Divergenz jeder Rotation.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

$$\Omega = \text{rot } c \quad \text{und} \quad \text{div } \Omega = 0.$$

Wenn nun der erste Helmholtzsche Wirbelsatz besagt, dass die Zirkulation längs der Randkurve einer Fläche und ganz auf dem Mantel einer Wirbelröhre liegt, verschwindet die Zirkulation um verschiedene Querschnitte einer Wirbelröhre. Den zweiten Teil des Satzes - er ist der eigentliche Kern des 1. Helmholtzschen Wirbelsatzes - verstehen wir sofort. Die Zirkulation an einem beliebigen Querschnitt A der Wirbelröhre ist immer gleich. Somit kommt diese Aussage ($\Gamma_1 = \Gamma_2$) daher, wie eine Kontinuitätsgleichung. Und ich füge hinzu: auf die wir uns immer und immer verlassen können. Der 1.HW und die Kontinuitätsgleichung gelten für jede Strömung ohne Rücksicht auf ihre Ursache. In der Literatur nennt man den 1.HW auch die Kontinuitätsgleichung der Wirbelstärke. Das hat den praktischen Vorteil, dass man der Wirbelröhre eine Zirkulation Γ zuweisen kann in der Art, wie in einem inkompressiblen Fluid den konstanten Volumenstrom $dV=0$. Wir sehen sofort, dass sich die Zirkulation ($\Gamma=\text{const}$) auf einem Wirbelfaden gar nicht ändern kann immer dann, wenn der 1. Helmholtzsche Wirbelsatz gilt.

Die Idee des Rankine-Wirbels als ein synthetisches Konstrukt, ist ein Kombinationsmodell aus Potential- und Festkörperwirbel. Im Modell gibt es einen signifikanten Radius r_1 und mit dem Verhältnis r_1/R , einem generalisierten Radius; die Wirbelstärke des Wirbelkerns sei Ω_0 . Betrachten wir zuerst die Geschwindigkeitsverteilung über den generalisierten Radius. Rankine nahm an, dass sich im Innern eines realen Wirbelfadens immer ein Wirbelkern ($r < R$) befindet, in dem das Fluid wie ein starrer Körper rotiert. In der Skizze, Abb.4 sehen wir (1) Gradienten der generalisierten Geschwindigkeit in einem Potentialwirbel. Zur Kraftgröße: $c_p(r,t) = 1 - (v(r)/v_\infty)^2$, Gradient der generalisierten Geschwindigkeit in einem Festkörperwirbel (2), Geschwindigkeitsverteilung und Zirkulationsstärkeverteilung über einen generalisierten Radius beim Rankine-Wirbel (3). Der generalisierte Radius beim Rankine-Wirbel ist die Potentialwirbel-Komponente für Radien $r < r_1$.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

Die Geschwindigkeitsverteilung v/V_∞ besitzt ein Maximum in der Nähe des signifikanten Radius $r/R=1$, mit $c_{MAX}=\Gamma/2\pi R$. Das ergibt sich direkt aus der Geschwindigkeits- und Zirkulationsverteilung über den generalisierten Radius:

Die Geschwindigkeit	$\underline{c}(r) = r \Omega_0/2$	für $r < r_1$
	$\underline{c}(r) = (r_1^2/r) \Omega_0/2$	für $r > r_1$
Die Zirkulation	$\Gamma(r) = \pi r^2 \Omega_0$	für $r < r_1$
	$\Gamma(r) = \pi r_1^2 \Omega_0$	für $r > r_1$

Dort, wo die beiden Teilmodelle überlappen, ist die Kurve eigentlich nicht definiert; ein rein theoretisches Problem. Und ja, es gibt verbesserte Modelle.

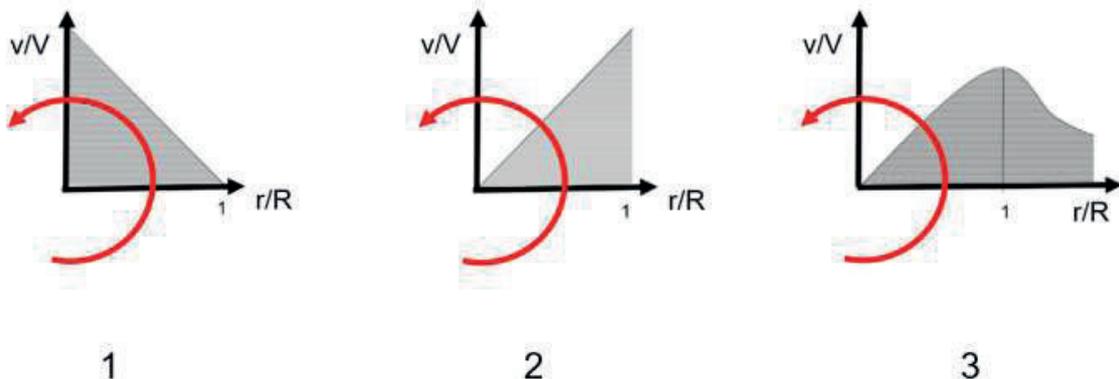


Abb.6: (1) Gradienten der generalisierten Geschwindigkeit in einem Potentialwirbel, in einem Festkörperwirbel (2) und beim Rankine-Wirbel (3), (eigene Darstellung Mi. Felgenhauer 2020).

Hamel und Oseen²⁸ haben eine Formel angegeben, die die Navier-Stokes-Gleichung exakt löst, das sei hier nur am Rande erwähnt. Betrachten wir die Kurve v/V_∞ des Rankine-Wirbels, können wir uns vom Modell der Geschwindigkeitsverhältnisse in der Randzone des Potentialwirbels lösen. Die Geschwindigkeit am Radius einer Wirbelwalze liegt offenbar unterhalb der des Modells des Festkörperwirbels oder ist zumindest nicht Null (Potentialwirbel).

Proof of Concept: die Fermat-Spirale

Der Lundgren-Wirbel²⁹ ist ursprünglich ein Modell für die intermittierende Feinstruktur von Turbulenzen mit hoher Reynoldszahl. Das Modell besteht aus schlanken coaxialen Spiralwirbellösungen, einem Ensemble zufällig orientierter strukturierter zweidimensionaler Wirbel, die durch einen axialsymmetrischen Dehnungsfluss gedehnt werden. Lundgren spricht von der Existenz eines selbstähnlichen enstrophieerhaltenden Bereichs im zweidimensionalen Kolmogorov-Enstrophiespektrum³⁰. Wir fühlen uns sofort an den narrativen Duktus der Chaostheorie der 80er Jahre erinnert. Und tatsächlich nähert die eigentümliche Figur des Lundgren-Wirbels in der realen Welt beobachtbare Scheschichtphänomene, die auch spiralige Elemente enthalten, wie etwa Kelvin-Helmholtz'sche Strukturen³¹.

Das Eindrehen der Spiralwindungen im Lundgren-Wirbel-Modell erzeugt dort eine Kaskade von Geschwindigkeitsschwankungen in kleinerem Maßstab. Die Ereignisse sind unempfindlich gegenüber der

²⁸ Der Hamel-Oseen'sche oder Lamb-Oseen'sche Wirbel (von Carl Wilhelm Oseen, Georg Hamel, Horace Lamb, im Folgenden einfach Oseen'scher Wirbel) ist ein mathematisches Modell einer Wirbelströmung eines linear viskosen, inkompressiblen Fluids. Das Geschwindigkeitsfeld von Strömungen solcher Fluide wird in der Strömungsmechanik mit den Navier-Stokes-Gleichungen beschrieben, die vom Oseen'schen Wirbel exakt erfüllt werden. Das Fluid strömt rein kreisförmig jedoch zeitabhängig, instationär um das Wirbelzentrum. (Wikipedia) Siehe auch: M. Bestehorn: Hydrodynamik und Strukturbildung. Springer, 2006, ISBN 978-3-540-33796-6, S. 380. F. Kameier, C. O. Paschereit: Strömungslehre. Walter de Gruyter, 2013, ISBN 978-3-11-018972-8, S. 274 ff.

²⁹ T. S. Lundgren (1982) Strained spiral vortex model for turbulent fine structure, The Physics of Fluids 25, 2193

³⁰ Die Mikroskala von Kolmogorow ist die kleinste Skala bei der Betrachtung der Energiekaskade einer turbulenten Strömung.

³¹ Als Kelvin-Helmholtz-Instabilität, oder KHI, bezeichnet man das Anwachsen kleiner Störungen in der Scherschicht zweier Fluide mit unterschiedlichen Strömungsgeschwindigkeiten. Wikipedia

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

Zeitabhängigkeit der Dehnungsrate, einschließlich selbst intermittierender Ein-oder Aus-Dehnungen. (siehe auch die Graphiken in: T. S. Lundgren (1982) Strained spiral vortex model for turbulent fine structure, The Physics of Fluids 25, 2193.)

Im Wesentlichen war 1982 alles gesagt. Die Grundstruktur, die Geschwindigkeitsverteilung, das Energiespektrum. Und die Transienz. Moffat³² nennt 1992 den Lundgren-Wirbel das endgültige Ergebnis der Kelvin-Helmholtz-Instabilität und zeichnet das Wirbelmodell als eine geschlossene kohärente Struktur. Wir wiedererkennen in dieser Lundgren-Kurve die ehrwürdige „Fermat- Spirale³³“, ihrer eleganten geometrischen und algorithmischen Erscheinung nach!

Wesentlich an der Fermat-Spirale ist der mit dem Erzeugendenradius R abnehmende Windungsabstand. In diesem Sinne ist das hier zur Diskussion stehende Objekt gerade keine fermat'sche oder parabolische Kurve, aber eine Variante ihrer. Vollständig ist die Fermatsche Spirale dann, wenn ein Ast zum Mittelpunkt hineinführt, die Kurve dort einen Wendepunkt besitzt und der zweite Ast (zentral-) symmetrisch aus der Spirale wieder hinausführt. Diese Eigenschaft möchte ich in das Modell übernehmen (Abb.: 7 und 8)³⁴.

$$X = a_x \varphi R \cos(\varphi)$$

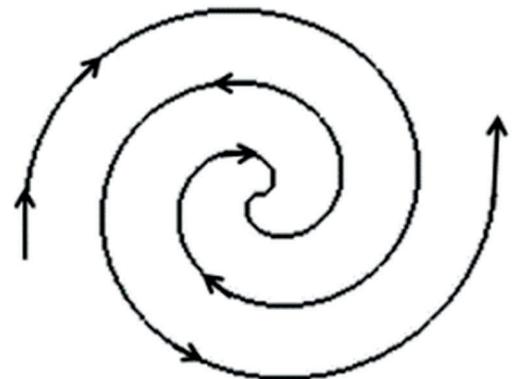
$$Y = a_y \varphi R \sin(\varphi)$$

$$Z = a_z \varphi R$$

für $\varphi: \{2\pi n < \varphi < 0\}$ und $\{0 < \varphi < 2\pi n\}$;

n ist die Windungszahl,

a_x, a_y, a_z sind Skalen.



³² H.K. Moffatt (1992) Spiral structures in turbulent flow. Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, Silver Street, Cambridge, CB39EW

³³ ³³ PIERRE DE FERMAT (* 20. August 1601 Beaumont, † 12. Januar 1665 Castres) französischer Mathematiker. Er begründete neben RENÉ DESCARTES die analytische Geometrie. Des Weiteren arbeitete er auf den Gebieten der Zahlentheorie und war an der Ausarbeitung von Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung beteiligt. Eine besondere Berühmtheit erlangte sein Name im Zusammenhang mit dem sogenannten (großen) Satz von Fermat, dessen Beweis viele Generationen von Mathematikern beschäftigte und erst im Jahre 1994 durch einen britischen Wissenschaftler gelang.

³⁴ (eigene Darstellung Mi. Felgenhauer 2020).

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

In den vergangenen Tagen und Wochen ging ich reichlich verzweifelt der Frage nach, ob fermatsche Kurven in der Natur vorkommen oder nicht. Der nach Archimedes benannten Figur, dieser beschreibt sie in seiner Abhandlung „Über Spiralen“ (225 v. Chr.), ist das natürliche Äquivalent unmittelbar. Zwar tauchen im Zentrum vereinte, erst links- und dann rechtsdrehende Spiralen in mancher Mythologie auf, aber Hinweise auf biologische Formen etwa, finde ich nicht. Die von Haller [Hal-00] untersuchten Strömungsphänomene stammen aus der unbelebten Natur und enthalten Lagrange Kohärente Objekte oder weisen auf sie hin, aber fermatsche Kurven untersucht die Haller-Group nicht. Ich war mir von Anfang meiner Untersuchungen an nicht sicher, ob ich diese seltsamen Wicklungen der Fermat'schen Form in Karman'schen Wirbelstraßen finden würde, also bei Fluidsystemen, die hinter einem umströmten Körper ein Muster gegenläufiger spiraliger Strukturen ausbilden. Eine der schönsten stationären Karman'schen Wirbelstraßen ihrer Art baut sich hinter einer Fahrwassertonne in der Elbe bei Magdeburg auf. Zu beobachten ist diese Wirbelstraße (auf dem Fliegewässer als Oberflächenstruktur) in südlicher Richtung von der Herrenkrug Eisenbahnbrücke³⁵ aus. Da man sich in der Regel in einem fahrenden Zug befindet, muss man sich mit dem Gucken ein wenig beeilen. Sieht man tatsächlich eine Lagrange Kohärente Struktur, oder will man sie einfach nur sehen?

Im Vorfeld dieses Aufsatzes betrachtete ich Bilder aus Beobachtungen der Natur, in erster Linie aber Computeranimationen aus Simulationen. Doch je mehr ich lernte, die Muster zu lesen, umso verwegener erschien mir meine Annahme, Lagrange Kohärente Strukturen in der Natur aufzufinden. Werden Simulationen nicht in besonderer Weise auf die Darstellung bestimmter Strömungsmuster, Strukturen, Objekte hin konditioniert, zeigen sie diese auch nicht. Dieser Eindruck bleibt auch nach langjähriger Beschäftigung mit Ergebnissen aus Strömungssimulationen. Außerdem: Die Simulation Karman'scher Wirbelstraßen

³⁵ Die Herrenkrug-Eisenbahnbrücke in Magdeburg-Herrenkrug überspannt die Elbe bei Stromkilometer 329,56. Ich hatte 15 Jahre das Glück, mindestens einmal in der Woche mit der Bahn von Berlin nach Magdeburg und wieder zurück zu fahren.

bleibt immer eine besondere Herausforderung, egal ob man sich in der Welt der tradierten CFD (Computational Fluid Dynamics) bewegt oder schon den neuen, sehr anderen Planeten der gitterlosen Verfahren SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) bewohnt.

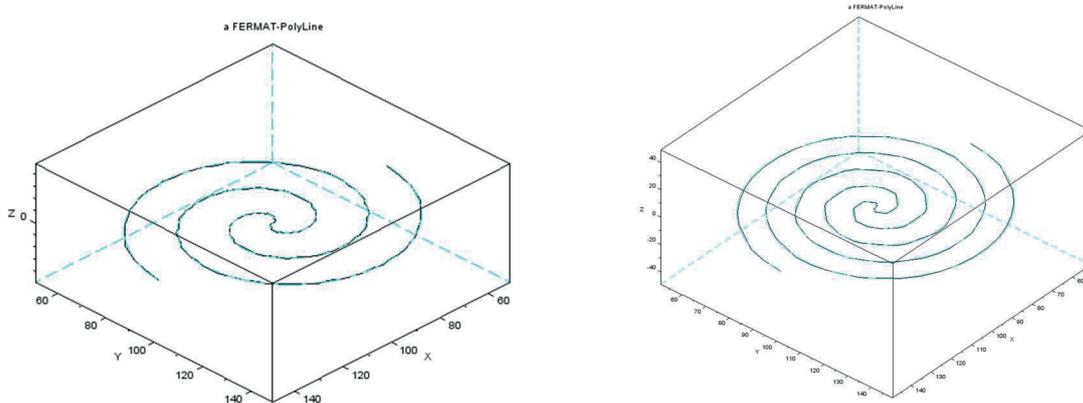


Abb.: 8. Mehrgängige Fermat-Spiralen ($n=1.5$ links, rechts $n= 3.5$). Beide Objekte bauen auf skalierbare Polygone gleicher Dimension ($\text{dim}=200$ Stützstellen) auf, die im Strömungsraum (200^3 Zellen) platziert werden. (eigene Darstellung Mi. Felgenhauer 2020).

Die in Graphiken dargestellten Analyseergebnisse aus CFD-Simulationen, sind in erster Linie Druckgradienten oder Geschwindigkeiten im Feld, also Größen, die mit den bewährten Methoden ineinander überführt werden können; gelegentlich sehen wir in der Meteorologie eine „Wirbeligkeit (Vorticity³⁶)“ der Strömung dargestellt. Die Verteilung der (potentiellen) Vorticity (PV) dort kann bei adiabaten Prozessen die vollständige Information des Temperatur-, Masse- und Geschwindigkeitsfeldes enthalten. Das klingt verlockend. Dennoch ist nicht zu erwarten, dass eine Verteilung der Wirbeligkeit in einer Strömung auch Orte hoher Zirkulation oder Wirbeldichte ausweisen und somit die Anwesenheit Lagrange Kohärenter Objekte markieren.

³⁶ Wirbeligkeit (engl. Vorticity), ein Maß der Drehbewegung eines in einer Strömung mitgeführten Fluidteilchens um seine vertikale Achse (relative Vorticity), ggf. addiert mit der Drehkomponente, die das Teilchen durch die Rotation der Erde erfährt (in der Meteorologie). Diese Komponentensummen wird als absolute Vorticity bezeichnet.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

In der Strömungsmechanik existieren überdies unterschiedliche Interpretationen des Begriffs Vorticity.

Gäbe es fermat- spiralige Lagrange Kohärente Objekte in der realen Welt, woran würden wir sie erkennen? Wenn man (als Mensch) Computer-Animationen betrachtet, die nicht in irgendeiner Weise auf die Suche nach Lagrange Kohärenten Systemen konditioniert sind, etwa weil die Seinsmerkmale der Strukturen gegebenenfalls fluktuativ sein können, bleibt nur die intuitive Spekulation³⁷ des Betrachters als Methode übrig. Nach meiner Ansicht sind Muster über LCO qua Definition dadurch gekennzeichnet, dass nur solche zusammenhängenden Strukturen in Strömungsbildern erscheinen können, die Geschwindigkeitsverteilungen als Strukturen unterschiedlicher Einfärbung in einem Fluid darstellen. Es ist mehr eine Methode der subjektiven Detektion, als ein wissenschaftliches Verfahren. Eine sehr schöne Computer-simulation auf SPH-Basis einer Karman'schen Wirbelstraße, bei der die subjektive Detektion kohärenter Strukturen gelingt, stammt von der jungen Firma DIVE Solutiones³⁸ aus Berlin. Man meint ein „linienhaft-fädiges“ Subsystem zu erkennen, aber es ist kein Lagrange Kohärentes Objekt. Wir sehen miteinander „vernachlässigte Fluid-Schnellen“ als Gebiete gleicher Strömungsgeschwindigkeit, aber die Kohärenz von Fluidelementen ist reine Suggestion. Obwohl den SPH-Modellen eine (artifizielle) Zähigkeit unterlegt ist, existiert eine Kopplung benachbarter Partikel in dieser Simulation nicht. Der Stabilität fädiger Unterstrukturen muss also eine andere physikalische Ursache dienen. Wenn „das Linienhafte“ nach ein paar Weglängen zur Ausbildung spiraliger Gestalt gelangt, sehen wir die Geschwindigkeitsgleichen in einer Art um ein stromabwärts abschwimmendes Zentrum kreisenden Ring formiert. Wir sehen Ellipsen, aber keine Spiralen. Wir sehen also keine fermat'sche Struktur. Das liegt

³⁷ Spekulation (von lat. *speculari* spähen, beobachten) Wikipedia.

³⁸ dive solutions ist ein preisgekröntes Deep-Tech-Startup mit Sitz in Berlin. Das Unternehmen wurde 2018 als Spin-off aus mehrjährigen Forschungsprojekten auf dem Gebiet der Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) gegründet. Heute entwickeln wir die Weltklasse-Software, die Ingenieuren dabei hilft, immer nachhaltigere Produkte zu entwickeln. (Aus einem werbenden Text ebendort) <https://dive-solutions.de/>

keineswegs an der SPH-Methode selbst, im Gegenteil: gerade wegen des Lagrange-Charakters der Partikelverfahren kann hier die Bahn jedes Flüssigkeitsteilchens im Strömungsraum explizit über die gesamte Simulation eines dynamischen Systems verfolgt werden; in Abhängigkeit von der Partikelzahl und der Mächtigkeit des Modells, seiner Auflösung.

Fehlt dem Betrachter (also mir) etwa nur das fokussierende Auge? Die Züricher Gruppe um G. Haller³⁹ entwickelte um 2010 auf die besonderen Kontureigenschaften Lagrange Kohärenter Systeme zielende Bildverarbeitungs-Methoden für Messdaten aus der realen Welt. Das Auffinden zusammenhängender Lagrange Kohärenter Strukturen gelingt dieserart mit so genannten „Finite-Time-Lyapunov-Exponenten (FTLE)“. Der Lyapunow-Exponent⁴⁰ beschreibt dabei die Geschwindigkeit, mit der sich zwei benachbarte Punkte im Strömungsraum voneinander entfernen oder annähern. Ein Feld aus FTLE enthält also Merkmale von Kohärenz (von Strukturen und Oberflächen) in dynamischen Szenerien. Im Prinzip funktioniert das auch in der artifiziellen Welt der CFD-Simulationen. Eine Forschergruppe um Sun und Colagrossi⁴¹ formulierte (2016) die FTLE-Methode im Kontext einer Smoothed Particle Hydrodynamics-Simulation. Und tatsächlich: jetzt sehen wir fermat'sche Spiralen. Wie schön sie doch sind! Und seltsam: stromabwärts nimmt die Gängigkeit der Spiralen zu. Erwarten wir nicht intuitiv das genaue Gegenteil? (siehe auch: Sun, Colagrossi, Marrone, Zhang (2016), Detection of Lagrangian Coherent Structures in the SPH framework)²¹

³⁹ <https://ifd.ethz.ch/research/group-haller.html> ... develops nonlinear dynamical systems methods to solve complex problems in applied science and engineering. We specialize in devising analytical and numerical techniques for problems with nonstandard features: high-dimensional, strongly nonlinear, time-dependent or multi-scale. Prof. George Haller (Group Lead), Institute of Mechanical Systems, ETH Zürich

⁴⁰ Lyapunow-Exponent eines [dynamischen Systems](#) (nach [Alexander Michailowitsch Lyapunow](#)). Pro Dimension des Phasenraums gibt es einen Lyapunow-Exponenten, die zusammen das sogenannte Lyapunow-Spektrum bilden. <https://de.wikipedia.org/wiki/Lyapunow-Exponent>

⁴¹ Sun, P.N., Colagrossi, A. Marrone, S., Zhang, A.M, (2016) Detection of Lagrangian Coherent Structures in the SPH framework, College of Shipbuilding Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China; CNR-INSEAN, Marine Technology Research Institute, Rome, Italy; Ecole Centrale Nantes, LHEEA Lab. (UMR CNRS), Nantes, France.

Moor'sche Methoden

Zelluläre Automaten (ZA) sind numerische Objekte, die auf zweidimensionalen Feldern operieren, indem sie dort lokale Entscheidungen treffen. Die Objekte sind in der Regel binär, die (Spiel-) Felder als Matrizen formuliert und meistens groß $\{i > 100, k > 100\}$. Nach der Analyse seiner Umgebung entscheidet der binäre ZA ob er den Wert EINS oder den Wert NULL annehmen will. Opportune ZA werden EINS wenn in ihrer Umgebung Einsen vorherrschen oder NULL wenn in der Umgebung viele Nullen sind. Oppositionelle Zelluläre Automaten tun genau das Gegenteil. Je nach Wahl der Regeln mit denen der ZA entscheidet, sind lokale, regionale oder globale Oszillationen, Bewegungen oder Diffusion, Leben oder Tod von Zellen erwünschte Simulationsergebnisse. Das Spiel des Lebens (engl. Conway's Game of Life) ist ein vom Mathematiker John Horton Conway 1970 entworfenes Spiel, basierend auf einem zweidimensionalen zellulären Automaten. Es ist eine einfache und bis heute populäre Umsetzung der Automaten-Theorie von Stanisław Marcin Ulam. (Wikipedia)

In allen Szenarien muss die Nachbarschaft eines Zellulären Automaten klar definiert sein. Sind auf einem Spielfeld (in einer Matrix) neben den vier direkten Nachbarelementen (vorn, hinten, links, rechts) auch noch die diagonal benachbarten Zellen relevant (Windrose: N, NO, O, SO, S, SW, W, NW), spricht man, Edward F. Moor⁴² zu Ehren, von einer Moor'schen Umgebung. Ein einzelliger ZA hat im Sinne Moors Umgebungen von Moor8 (2D), Moor24 (2D), Moor26 (3D), usw. Bei Mehrzelligen ZA mag man vielleicht von Moor'schen Rändern sprechen. Die Idee analysier- und kontrollierbaren Umgebungen ist in unterschiedlichen Szenarien immer gleich.

Moor'sche Matrizen nenne ich zelluläre Unterräume eines 3D-Feldes; sie können durchaus groß sein. In der biologischen aber auch zunehmend in der artifiziellen, digitalen Bild- und Musteranalyse

⁴² Edward Forrest Moore (* 23. November 1925 in Baltimore, Maryland; † 14. Juni 2003 in Madison, Wisconsin) war einer der Mitbegründer der Automatentheorie, Erfinder des nach ihm benannten Moore-Automaten und ein früher Pionier des künstlichen Lebens. Von 1966 bis 1985 lehrte er als Professor für Mathematik und Informatik an der University of Wisconsin (Wikipedia).

taucht häufig die Aufgabe auf, lokale Ableitungen zu bilden. Auch hier sind die Felder groß, beispielsweise bei der Simulation des Facettenauges einer Stubenfliege. Getriggert durch die Arbeitsspiel-frequenz der Stubenfliege, einer Flügelschlagzahl von 440 Hz, was in etwa dem Kammerton A entspricht, treffen nun wieder und wieder visuelle Informationen in das als 2D-Matrix organisierte Facettenauge des Tiers. Die neuen Sinnesreize treffen ein, während die vorherigen gerade in den Nervenbahnen verarbeitet werden und wie ein informationeller Nachhall „durch das Nervensystem sinken“. Auf der neuronalen Seite des Facettenauges kommt es zu einer Superposition der aktuell wahrgenommenen Information mit der noch immer existierenden nachhallenden, irgendwie stehenden, visuellen Information. Da sich das Tier im Fluge bewegt, ist das rezent wahrgenommene Muster gegenüber dem Nachhallenden, ein klein wenig örtlich oder auch zeitlich oder auch beides „verrückt“. Diese lokale (Verrückungs-) Operation ist relevant! Man kann zeigen, dass die Information translative und transitive Anteile besitzt, aus denen informationelle Konstrukte extrahiert werden können, etwa solche, die Ortsableitungen und zeitlichen Gradienten ähnlich sind.

Aus technischer Sicht beleuchtet, erscheint dieses Informationsverarbeitungssystem, als ob es wie eine „Kopier- und Verschiebe-Maschine mit Blattwendeeinrichtung“ funktionieren könnte, also: “kopieren, verschieben, ablegen, nochmal kopieren, verschieben und dann ablegen“. Das Ganze einmal nach links und einmal nach vorn. Rack, rack. Es hört sich so ein bisschen an wie MONEY von Pink Floyd. Wenn man die Platte ein wenig schneller abspielt. Oder erheblich schneller, denn der gesamte Vorgang dauert bei Stubenfliegen nur zwei tausendstel Sekunden.

Aus diesem offenbar sehr leistungsfähigen biologischen Prozess lassen sich artifizielle Matrizen als zelluläre Unterräume eines Feldes herleiten. Moor'sche Methoden emulieren die neuronalen Vorgänge des Insektenauges in numerischen Modellen. “Kopieren, verschieben, ablegen, nochmal kopieren, verschieben, dann ablegen“ nenne ich

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

Moor'sche Prozesse immer dann, wenn sie auf planaren oder dreidimensionalen Feldern stattfinden und numerisch mit Matrizen realisiert werden. Matrizenrechnung kann sehr spannend sein.

$$\underline{C}_{(m,n)} = \underline{A}_{(m,n)} + \underline{B}_{(m,n)} = (a_{ij} + b_{ij})_{(m,n)} \text{ für alle } i,j$$

Das Resultat dieser Addition oder einer Subtraktion ist selbst wiederum eine Matrix, welche in einem einfachen Fall die gleiche Form hat wie jede der beiden ursprünglichen Matrizen. Es gilt das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz der Matrixsuperposition. In den C-basierten Matrizen-Sprachen Matlab, Scilab oder Octave werden Matrix-Operationen, wie etwa die Superposition zweier Felder sehr schnell ausgeführt; wenn diese Matrizen die gleiche Form besitzen. Mit den moor'schen Methoden können Superpositionen auch auf Gebieten einer Matrix ausgeführt werden. Sofern die Matrizen Untermatrizen sein dürfen, kommt der Kontrolle der Inhärenz der Operationen der größte algorithmische Aufwand zu. Diese Kompliziertheit nimmt der gesamten Operation ein wenig den Schwung. Dennoch sind die Implementationen moor'scher Methoden extrem schnelle Algorithmen. Die kumulativen Induktionswirkungen in einem (größeren) Strömungsfeld C werden in dieser Untersuchung also mit speziellen (kleineren) moor'schen Untermatrizen B iteriert.

$$\underline{C}_{(m,n,k,t+1)} = \underline{C}_{(m,n,k,t)} + \underline{B}_{(m',n',k')}$$

Wenden wir nun das Verfahren der Moor'schen Matrizen auf das Induktionsgeschehen in einem Strömungsraum an. Ein Strömungsraum, in dem sich ein Lagrange Kohärentes Objekt befände.

Der Raum $\underline{B}'_{(m',n',k')}$ ist dann ein Unterraum von $\underline{C}_{(m',n',k')}$, dem Strömungsraum, der die richtungsabhängigen Induktionswirkungen des Lagrange kohärenten Objekts enthält und zur Laufzeit der Simulation sukzessive (t+1, t+2..) iteriert wird. Die moor'sche Matrix B für jede Komponente der induzierten Geschwindigkeit ist zunächst ein (m',n',k')-dimensionaler Container, der im Simulationsprozess mit der

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

Richtungsinformation und einer Intensität, die aus der Zirkulation des Lagrange Kohärenten Objekts stammt, „beladen“ und konditioniert wird. Die moor'schen Matrizen für die X-Komponente der induzierten Geschwindigkeit im Feld (links) und der Y-Komponente im Feld (siehe Abb.9, mittig) könnten zu einer resultierenden induzierten Geschwindigkeit verrechnet werden (rechts im Bild), was aber in der Berechnungspraxis nicht erfolgt. Vielmehr werden – den Analysezielen geschuldet - die Untermatrizen der (induzierten) Geschwindigkeitskomponenten voneinander getrennt in separaten X,Y,Z-Felder kumuliert.

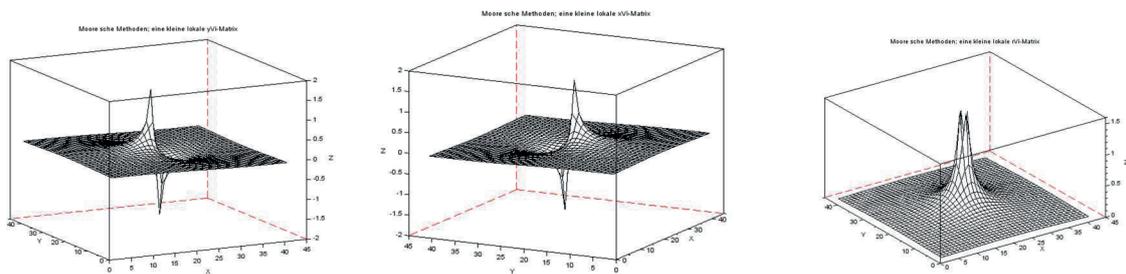


Abb.9: Moor'sche Matrize für die Y-Komponente (links) und der X-Komponente (mittig) der induzierten Geschwindigkeit. Die lokale resultierende induzierte Geschwindigkeit (rechts). (Eigene Darstellung Mi. Felgenhauer 2020).

Diese, jetzt recht speziellen Moor'schen Matrizen enthalten lokale Informationen über Induktionswechselwirkungen in einer E-Umgebung (lokaler) Quellen im Strömungsraum, denen lediglich ein Richtungsvektor (Lagrange) unterlegt werden muss. Mehrere diskretisierte Induktionsquellen im Feld bilden aufgereiht ein zusammenhängendes System ab (Kohärenz) und stellen so die den Lagrange Kohärenten Objekten zugrundeliegende Modellvorstellung.

Elementare Variationen der Fermat-Spirale

Betrachten wir nunmehr das Modell des Lundgren-Wirbels in der Notation der Fermat-Spirale und verbleiben weiter bei artifiziellen Formationen.

Die „Nichtganz-Fermat-Spirale“, die ich hier ins Spiel bringe, das Original folgt dem sehr einfachen Gesetz: $r=a(\varphi)^{1/2}$, $\varphi >0$, ist Dank des FTLE-Verfahrens (Finite-Time-Lyapunov-Exponenten) also durchaus eine Formation, die wir in der unbelebten Natur vergegenwärtigen; als zentralsymmetrisch-konzentrisches Konstrukt (der reinen Lehre) und als verschobene, verzerrte Struktur. Die Deformationen sollen zunächst deterministisch und es sollte zulässig sein ein Modell dieser quasi-Fermat-Spirale hinsichtlich ihrer energetischen Eigenschaften und der Impuls-Eigenschaften ihrer Deformierten zu untersuchen.

Eine sehr einfache die Topologie erhaltende, affine Transformation des fermat'schen Objekts gelingt wie folgt: von einem vereinbarten Zentrum aus werden die Koordinaten der Form variiert in der Art, dass aus einer eher dichten Packung (D-LCO) eine lockere Low-Density-Struktur (LD-LCO) entsteht. Das zu analysierende Strömungsfeld wählen wir ausreichend groß (200^3 Zellen). Ausgehend von der eher dichten Packung des Lagrange Kohärenten Objekts, D-LCO, dehnen wir das Objekt nach und nach aus. Wichtig dabei: die Anzahl der Quellen Q der Induktionswirkungen A bleibt gleich. Ein HD-LCO simuliert eine Verdichtung der spiraligen Form. Dehnung und Verdichtung eines LCO widerspricht natürlich der Helmholtzschen Annahme, dass keine Dilation im Kontinuum der Induktionsquellen auftritt; sie (die konformen Transformationen) eröffnen aber die Möglichkeit einer Bilanzierung von Impulsmächtigkeit und Energiewirkung. Sofern wir Schwächen in der Modellbildung tragen wollen.

In der CFD-Szene sind zweidimensionale Strömungsberechnungen sehr beliebt. Nicht nur wegen der geringeren Kosten der Implementation, der Deklaration von Rand- und Nebenbedingungen,

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

der Berechnung selbst, vor allem aber der Berechnungszeit, sondern meistens enthalten schon 2D-Szenarien die erforderlichen Informationen zur Lösung der gestellten Aufgabe einer Simulationskampagne.

Abb.10: Variationen einer ebenen Fermat-Spirale.

SCHWARZ: Phänomenologie einer Fermat-Spirale (D-LCO);
ROT: Transformation in X-Richtung (Dehnung, LD-LCO);
GRÜN: Transformation in Y-Richtung (Dehnung, LD-LCO);
BLAU: Transformation in Y-Richtung (HD, Stauchung). Die Transformierten haben die gleiche Dimension und besitzen in der Ebene gemeinsame Punkte. (Eigene Darstellung Mi. Felgenhauer 2020).

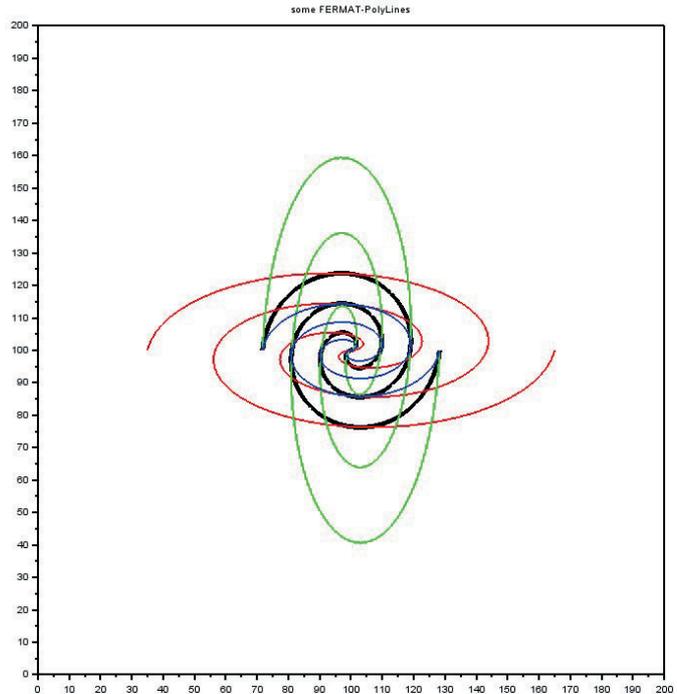
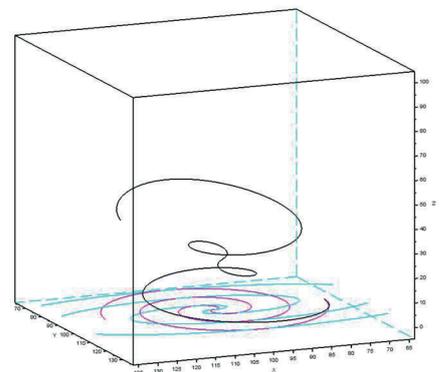


Abb.11: Homomorphe Variationen von Fermat-Spiralen im Raum. MAGENTA: Phänomenologie der ebenen Fermat-Spirale; TÜRKIS: Transformation in X-Richtung (Dehnung, LD-LCO); SCHWARZ: Transformation in Z-Richtung. Die Transformierten haben die gleiche Dimension. (eigene Darstellung Mi. Felgenhauer 2020).



Weitere Gründe für eine 2D-Lösung können auch rein praktischer Natur sein: die Berechnungsergebnisse in der Ebene lassen sich unmittelbar evaluieren, graphisch darstellen und weiterverarbeiten, beispielsweise bei der Bildverarbeitung von Lagrange Kohärenten Systemen mit Finite-Time-Lyapunov-Exponenten-Verfahren. Auch ist es in der Simulationspraxis wenig angenehm, wenn sich ein zu untersuchendes Objekt in den dreidimensionalen Strömungsraum „verabschiedet“.

In dem diesem Aufsatz zugrundeliegenden Simulations-Szenario erfolgen alle Untersuchungen Lagrange Kohärenter Objekte einer Simulations-kampagne zunächst in einem dreidimensionalen Strömungsfeld mit 200^3 Evaluationspunkten. Immer dann, wenn der dreidimensionale Ansatz keine weiteren nützlichen Erkenntnisse befördert, erlaube ich mir ein 2D-Modell zu berechnen. Informationen entsprechend der zugrundeliegenden Potentialtheorie, sei die Strömung reibungs- und rotationsfrei. Die in die Strömung induzierten partiellen Geschwindigkeiten sind konservativ anzusehen und dieserart superponierbar entsprechend der Theorie des Lösungsansatzes.

Die Dimension der Erzeugendenpolygone aller LCO einer Kampagne sei gleich, die affin Transformierten sind homomorph. Erstes Ziel der Simulation ist zu zeigen, dass Invarianz der in das Fluid induzierten Energie herrscht, bei gleichzeitiger Veränderlichkeit der Impulsmächtigkeit der Erzeugendenstruktur in ihren Systemgrenzen.

Implementiert sind die Algorithmen in der C-basierten Sprache SciLab, einem MATLAB-Derivat. Der Code ist unter FLOWLab⁴³ öffentlich gemacht.

Und er ist schnell. Das überrascht. Die Simulationen laufen auf einem nicht mehr ganz taufrischen PC mit 64Bit 8 Kerne-Prozessor Intel CORE i7-2600K@3.4 GHz (2010) aber inzwischen unter Windows 10

⁴³ FLOWLab ist ein FOSS Container des Autors: www.bmoto.de // Free and open-source software (FOSS) is [software](#) that can be classified as both [free software](#) and [open-source software](#). That is, anyone is [freely licensed](#) to use, copy, study, the software in any way. This is in contrast to [proprietary software](#), where the software is under restrictive [copyright licensing](#) and the source code is usually hidden from the users.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

Enterprise LTSC (2018); damals eine recht flotte Maschine, heute ist natürlich jedes Handy schneller.

Initiierung; das Q-Polygon. Das Lagrange Kohärente Objekt wird zunächst als n-dimensionales (kohärentes) Polygon formuliert. Die Konstruktionspunkte des Polygons sind adressiert und tragen Koordinaten; es sind zugleich die Quellpunkte des LCO-Modells $Q(x,y,z)$. Die Quellpunkte Q sind beliebig aber aufeinanderfolgend zusammenhängend (kohärent) formuliert. Die Diskretisierung der Quellpunktfolge wird bei der Initiierung (linspace) des Polygons festgelegt. Damit ist die Stützstellen-Mächtigkeit (Dimension n) des Polygons bekannt. Im Beispiel unten wähle ich ein Polygon mit 200 Stützstellen. Bei FERMAT-Polygonen ist neben der Diskretisierung und des (Anfangs-) Radius R noch die Gängigkeit der Spirale von Interesse. Die Koordinaten des Q-Polygons können nun einer affinen Transformation unterzogen werden. Dadurch entsteht ein neues Polygon, und damit ein neues Lagrange Kohärentes Objekt. Das ursprüngliche LCO und dessen beliebig, affinen Variationen sind jederzeit in einander überführbar, sie sind homomorph!

Tensorisierung; das R-Polygon. Aus dem euler'schen Koordinaten-Polygon kann auf einfache Weise das Lagrange Richtungspolygon errechnet werden. Das Koordinaten- und das Richtungspolygon existieren also gleichsam uns gleichzeitig, so dass an beliebiger Stelle im Strömungsraum eine lokale Induktionswirkung des Lagrange Kohärenten Objekts beschrieben werden kann. In der Berechnungspraxis arbeiten wir mit den oben beschriebenen Moor'schen Untermatrizen, die alle Aufpunkte A des Modells der Induktionswirkungen enthalten. Die Moor'schen Untermatrizen dürfen an beliebigen Orten $Q(x,y,z)$ innerhalb des dreidimensionalen Strömungsraums platziert werden immer dann, wenn sie innerhalb der Systemgrenzen existieren. Das ist der Grund, weshalb ich selbst für diese kleine Berechnungsübung ein vergleichsweise großen Strömungsraum (200^3) formuliert habe. Die Moor'schen Untermatrizen sind zunächst leere,

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

aber in ihrer Handhabung recht kluge Container, die in erster Linie Ortsinformationen enthalten. Sie werden mit der über die gesamte Simulationskampagne konstant gehaltenen Zirkulation Γ beladen und dann quasi „vor Ort“ mit der Richtungsinformation $R(x,y,z)$ an dieser Stelle des Strömungsraumes (richtungs-) konditioniert.

Also wird auf genau diesen numerischen Weg die tensorale Richtungsabhängigkeit der Induktionswirkung realisiert. Wir finden uns unversehens in der Euler'schen Nomenklatur wieder. Ich werde in diesem Aufsatz nicht zeigen, in welcher Weise das Feld auf das Lagrange Kohärente Objekt zurückwirkt. Gegenstand der Untersuchungskampagne sind lediglich die durch die Induktionswirkungen des Lagrange Kohärenten Objekts hervorgerufenen Geschwindigkeitsfelder im Strömungsraum. Sie lassen sich – mehr schlecht als rechtgraphisch darstellen und es werden Integral- und Mittelwerte aus dem berechneten (statischen) Strömungsfeld extrahiert. Von Interesse ist hierbei die vom Lagrange kohärenten Objekt in das Strömungsfeld induzierte Geschwindigkeit v_i -res, respektive deren Komponenten v_{i-x} , v_{i-y} , v_{i-z} ; die induzierte Geschwindigkeit ist eine kumulative, aber eben auch richtungs-abhängige Größe. Deshalb ist es wichtig, genau das zu bilanzieren, was wir ursprünglich in das System hineingesteckt haben (brutto), und was im Feld möglicherweise verborgen bleibt, letztlich, was im Feld „zu Tage“ tritt (netto). Die Brutto-Induktionswirkung wird vorzugsweise während ihrer Entstehung gemessen.

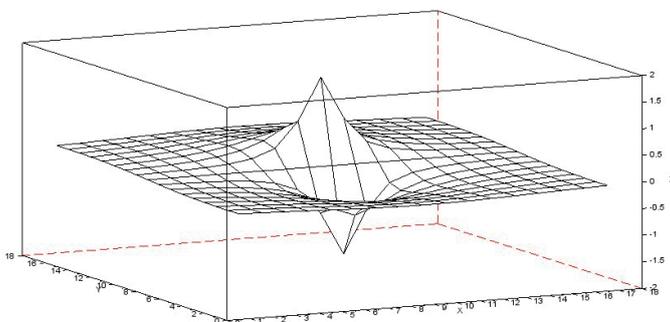


Abb. 12: Die Moor'sche Matrix der Induktionswirkungen.(eigene Darstellung Mi. Felgenhauer 2020).

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

Durchaus unterschätzt habe ich anfangs den Einfluß der „Diffusionsbreite“ der Induktionswirkungen. Scheinbar approximiert sie das Null-Niveau (Abb.12). In der numerischen Praxis aber haben auch sehr geringe kumulative Anteile Wert und Stelle. Die Dimension der moor'schen Matrizen hat unmittelbare Wirkung auf die Verarbeitungsgeschwindigkeit im Prozess. Ein sauberer Code muss das Fitting, die Gepasstheit, der Unterstruktur permanent untersuchen und unmittelbar (runtime) auf die Ergebnisse dieser numerischen Kontrolle reagieren. Dies ist recht teuer und für zukünftige Untersuchungskampagnen von Relevanz.

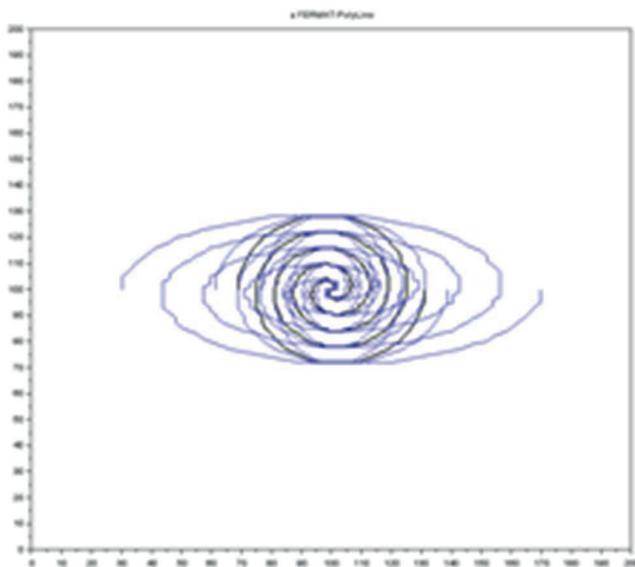


Abb.13: Laterale Deformation einer Fermat-Spirale. Ausgehend von der zentralsymmetrischen Form wird das Lagrange Kohärente Objekt sukzessive entlang der X-Achse deformiert (eigene Darstellung Mi. Felgenhauer 2020).

Die dem synthetisch Lagrange Kohärenten System innewohnende Induktionswirklichkeit wird in unterschiedlichen Szenarien in Abhängigkeit von der geometrischen Gestalt der Struktur unterschiedlich verwirklicht.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

Kumulierte induzierte Geschwindigkeit (brutto)	Σv_{rINDUZ}
X-Komponente der induzierten Geschwindigkeit	Σv_{xINDUZ}
Y-Komponente der induzierten Geschwindigkeit	Σv_{yINDUZ}
Z-Komponente der induzierten Geschwindigkeit	Σv_{zINDUZ}
Impulsmächtigkeit aus Induktionswirkung (netto)	$p \sim F(v_{rINDUZ})$
X-Komponente der induzierten Impulswirkung	v_{ixp}
Y-Komponente der induzierten Impulswirkung	v_{iyp}
Z-Komponente der induzierten Impulswirkung	v_{izp}
Energieäquivalent kum. Induktionswirkung (netto)	$e \sim F(v_{INDUZ}^2)$
Leistungsäquivalent kum. Induktionswirkung (netto)	$L \sim F(v_{INDUZ}^3)$

Die Tabelle und der Graph Abb.12 stellen die Impulswirksamkeit und deren Komponenten als (Impuls-) Äquivalent über bilaterale die Deformation dar (links). Die Formänderung reicht von einer Stauchung ($df_x < 0$, $df_y < 0$) bis zu unterschiedlich stark verformten Fermat-Spiralen vom bilateralen Typ ($df_x = 1.25$, $df_y = 1.25$; rechts im Bild). Die zur Entstehung der kumulativen Induktionswirkung erhobenen Größen (Σv_{xINDUZ} , brutto und Σv_{yINDUZ} , brutto) bleiben über alle Deformationen konstant.

Die Tabelle unten führt für bilaterale (df_x , df_y) und laterale (df_x) Deformationen der FERMAT-Spirale Impuls-, Energie-, und Leistungs-Äquivalente auf.

Das Diagramm Abb.15: zeigt das resultierende Impulsäquivalent, respektive die kumulierte resultierende induzierte Geschwindigkeit für eine bilateral deformierte FERMAT-Spirale. Die affine Koordinatentransformation greift zentral an. Der Funktionsaufruf in ProperCode vermittelt eine Abbildung des Polygons P auf P1. Das ist die Formation, die im nächsten Schritt der Simulation hinsichtlich des Richtungstensors analysiert wird.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

Impuls-, Energie-, und Leistungs-Äquivalente der deformierten Fermat-Spirale								
Äquivalent		Geschwindigkeit		Impuls	Energie	Leistung	ImpulsX	ImpulsY
		Σv_{xINDUZ} brutto	Σv_{yINDUZ} brutto	$F(v_{rINDUZ})$	$F(v^2_{INDUZ})$	$F(v^3_{INDUZ})$	abs(vixp) netto	abs(viyp) netto
	dfx, dfy	$m\ s^{-1}$	$m\ s^{-1}$	$m\ s^{-1}$	$m^2\ s^{-2}$	$m^3\ s^{-3}$	$m\ s^{-1}$	$m\ s^{-1}$
Zirkular	-0.25	281485	279459	54919	924755	23239533	35885	37126
	0	281486	279460	64212	902825	18342507	42103	44176
	0.25	281486	279460	75389	930718	16119317	48918	52197
	0.5	281487	279460	83029	850342	11898767	53788	57391
	0.75	281487	279460	91132	802858	9611204	59291	62437
	1.0	281487	279461	104570	868570	9699230	68421	71273
	1.25	281487	279461	122028	1000394	10889976	80216	83060
	dfx							
elliptisch	0	281486	279460	64212	902825	18342507	42103	44176
	1.0	229212	320581	76150	829803	13025952	51668	49517
	1.5	213055	329405	83133	898014	14053865	56644	52945
Berechnungsfeld: 200 ³ Stützstellen, Zirkulation $\Gamma = 10\ [m^2/s]$, Diffusion $\varepsilon = 20\ [LE]$								

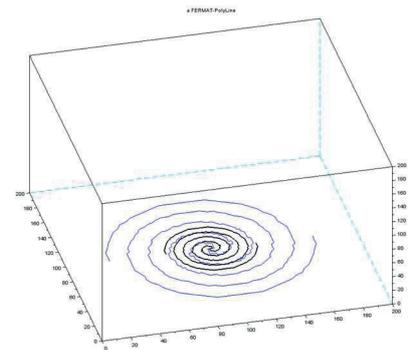
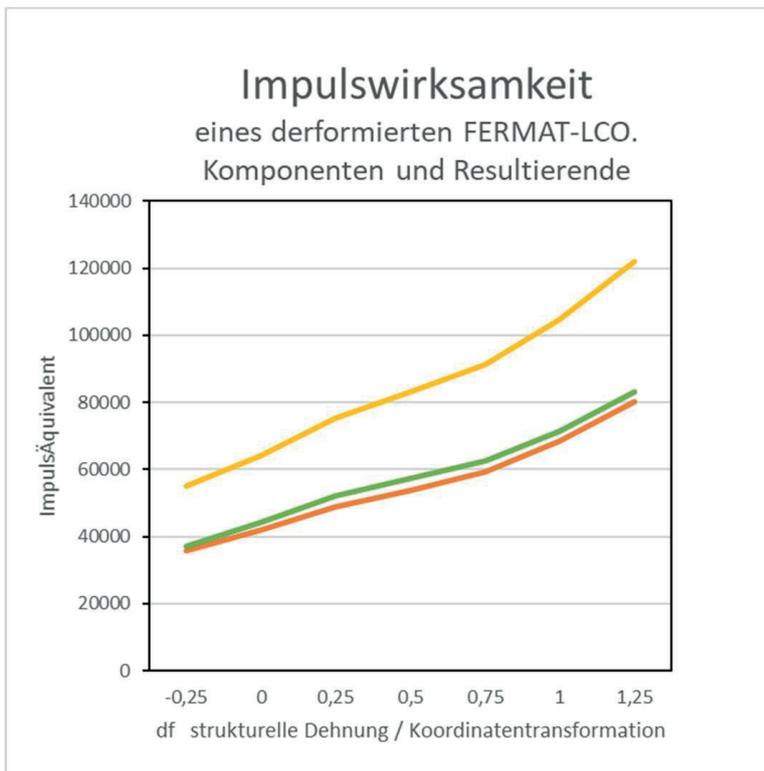


Abb.14: Impulswirksamkeit. Resultierende (gelb) und Komponenten des Impulsäquivalents (links). Unterschiedlich stark verformte Fermat-Spiralen vom bilateralen Typ (rechts). (Eigene Darstellung Mi. Felgenhauer 2020).

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

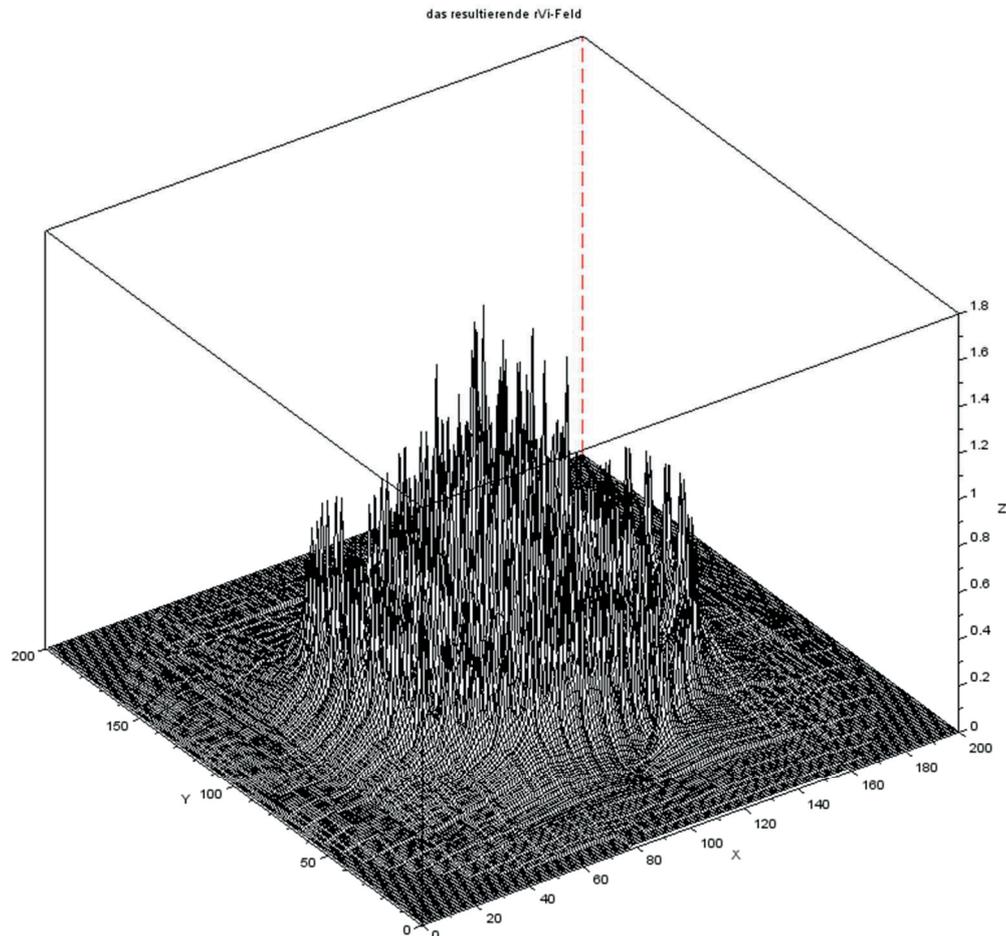


Abb.15: Das resultierende Impulsäquivalent, respektive die resultierende induzierte Geschwindigkeit für eine bilateral deformierte FERMAT-Spirale ($df_x=df_y=1.0$).

```
dFx = 1.0; dFy = 1.0; dFz = 0.0; xcp = 100; ycp = 100; zcp= 0.0;  
//determine Transformation  
P1=TRANSFORMpolygon_STRETCH(P,Fx,Fy,Fz,xcp,ycp,zcp);//Transform.ProperCode. (Eigene Darstellung Mi. Felgenhauer 2020).
```

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

Während der Simulation der Induktionswirkungen sind die Komponenten der resultierenden induzierten Geschwindigkeit vital.

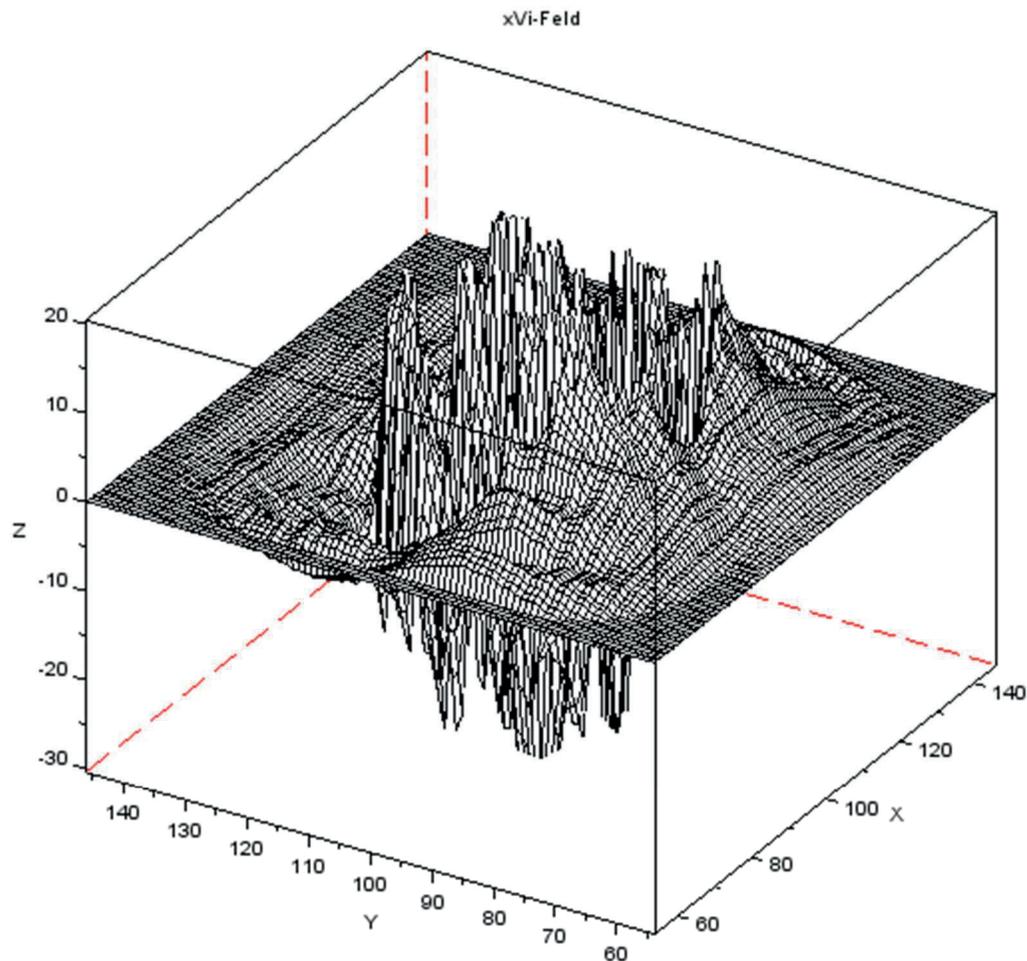


Abb.16: Die X-Komponente des resultierenden Impulsäquivalents, respektive die Komponente der induzierten Geschwindigkeit für eine bilateral deformierte FERMAT-Spirale ($df_x=df_y=-0.25$). (Eigene Darstellung Mi. Felgenhauer 2020).

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

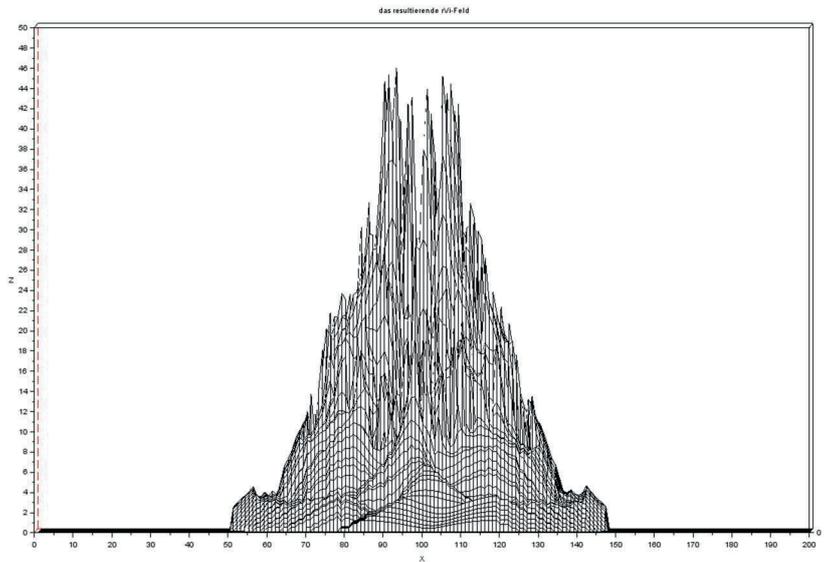


Abb.17: Die Resultierende des Impulsäquivalents, respektive die resultierende induzierte Geschwindigkeit für eine unverformte FERMAT-Spirale ($df_x=df_y=0$). (Eigene Darstellung Mi. Felgenhauer 2020).

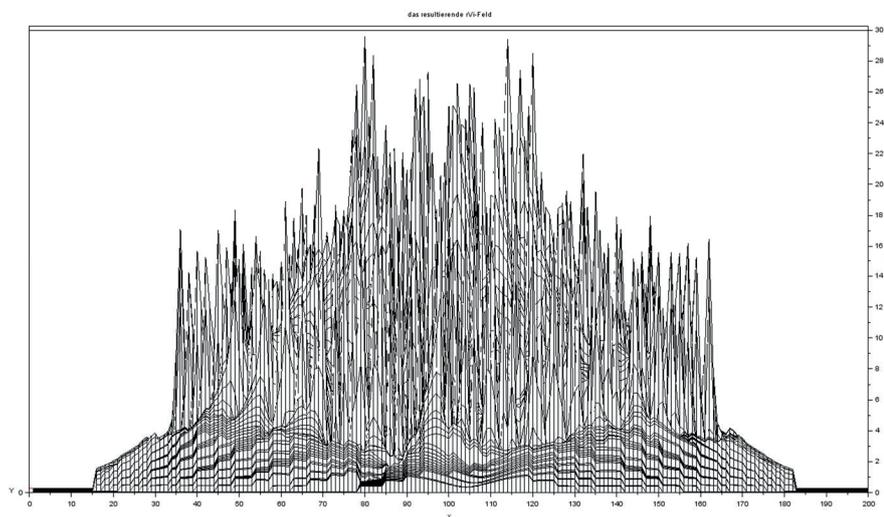


Abb.18: Die Resultierende des Impulsäquivalents, respektive die resultierende induzierte Geschwindigkeit für eine bilateral hochverformte FERMAT-Spirale ($df_x=df_y=1.25$). (eigene Darstellung Mi. Felgenhauer 2020).

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

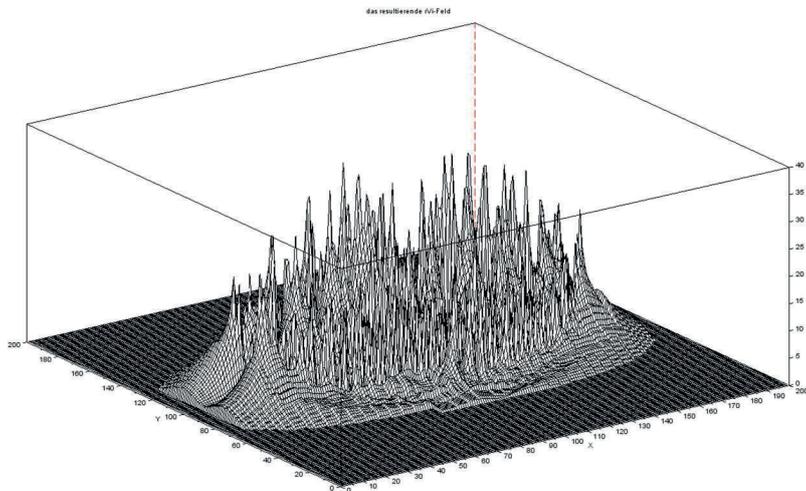


Abb.19: Die Resultierende des Impulsäquivalents, respektive die resultierende induzierte Geschwindigkeit für eine lateral hochverformte FERMAT-Spirale ($df_x=0$, $df_y=1.5$). (Eigene Darstellung Mi. Felgenhauer 2020).

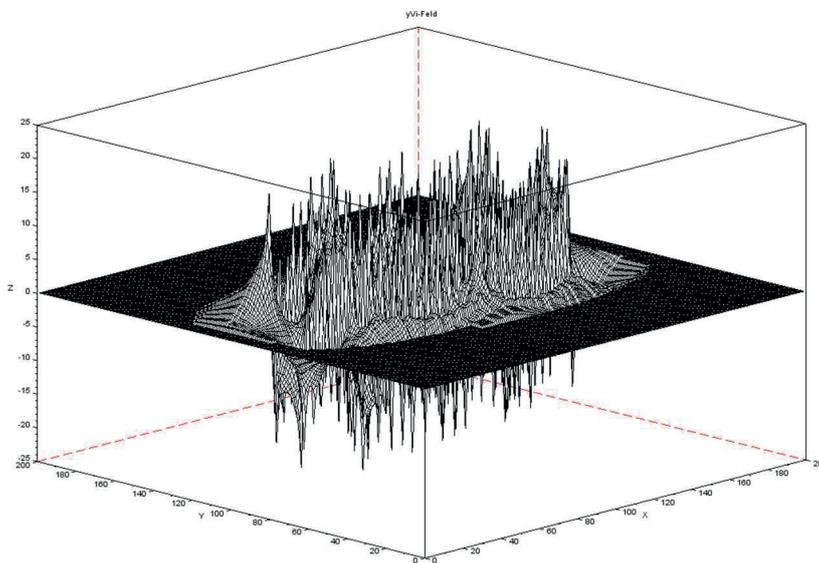


Abb.20: Die Y-Komponente des resultierenden Impulsäquivalents, respektive die Y-Komponente der induzierten Geschwindigkeit für eine lateral deformierte FERMAT-Spirale ($df_x=0$, $df_y=1.5$). (Eigene Darstellung Mi. Felgenhauer 2020).

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

Die affine Koordinatentransformation der homologen, linearen Dehnung $T(df_x, df_y, df_z)$ verschiebt die Quellpunkte der Induktionswirkungen im Flächenquadrat. Dies ist auch der Grund, warum die Deformationen einer so genannten Turtle-Graphik ähneln. Ich habe bewußt auf eine „Bereinigung“ der Koordinatenpositionen und auch auf lokale Diskretisierungen verzichtet, um Konsistenz und Vergleichbarkeit der Transformation zu erhalten. Die Geometrie von Adaptionen der FERMAT-Spiralen ist deshalb nicht immer elegant.

Was wir sehen und was wir errechnen. Zunächst einmal scheint das auf physikalische Wechselwirkungen beruhende Simulationsergebnis, den (theoretischen) Erwartungen des potentialtheoretischen Modells zu folgen. Das ist sehr beruhigend. Gleichsam bin ich über die (stochastische) Zerklüftetheit der Berechnungsergebnisse ein wenig erstaunt. Zukünftige Ermittlungen werden feiner diskretisierte beschreibende Polygone zum Ursprung haben. Gleichzeitig bin ich besorgt darüber, dass der Einfluß der Diffusionsweitenparameter auf das Berechnungsergebnis der Induktionswirkungen recht groß ist. Hatte nicht der kubische Einfluß der Abstände der Aufpunkte zu den Quellpunkten zu einer gewissen „Ruhe“ in den Induktionswirkungen geführt? Im physikalischen Modell sollte der Einfluß des Diffusionswegs nach 20 Längeneinheiten ($f=0.000125$), verschwinden. Seltsam. Was wir jedoch eindringlich sehen, ist die Abhängigkeit der (induzierten) Geschwindigkeit von der geometrischen Gestalt des Lagrange Kohärenten Objekts.

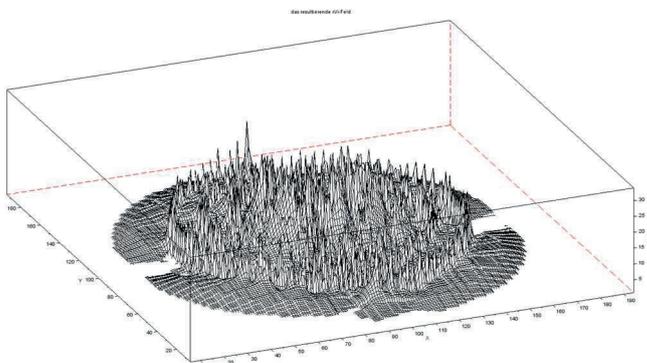


Abb. 21: Einblick auf das graduelle „innere Milieu“ einer Induktionswirkung für eine hochverformte Fermat-Spirale ($df_x=1.25$, $df_y=1.25$). (eigene Darstellung Mi. Felgenhauer 2020).

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

Um in einer ersten Untersuchung den Überblick zu behalten, sind lediglich stark kausale und extrem einfache Transformationen Gegenstand der Variation von spiraligen Lagrange Kohärenten Objekten und deren Untersuchung hinsichtlich Impulsmächtigkeit, Energie- und Transportleistungsverhalten. Beide LCO-Spiralen besitzen die gleiche energetische Potenz – der Erörterung der Tabelle oben (linke Spalten) sprach ich von einem energieschen „Brutto“ – das nach geometrischer Deformation unterschiedlich stark zur Impulswirksamkeit (Netto) beiträgt. Die stark kausale Transformation ist reversibel. Nicht nur in der Wechselwirklichkeit des reibungsfreien potentialtheoretischen Modells, sondern auch in der beobachtbaren (reibungsbefaheten) Strömungsrealität, wie die Untersuchungen Hallers (2010ff) über natürliche Lagrange Kohärente Systeme eindrucksvoll zeigen.

Die Abb.17 zeigt die Resultierende des Impulsäquivalents; respektive die von der FERMAT-Spirale ($df_x=0, df_y=0$) in das Feld induzierte Geschwindigkeit (links). Der gleiche Parameter für das bilateral deformierte System ($df_x=1.25, df_y=1.25$; Abb.21). Die Abbildungen behandeln keine Schnitte, sondern Aufsichten. Das innere Milieu der Geschwindigkeitsverteilung ist von durchaus komplizierterer Gestalt, wie in (Abb.20) ersichtlich.

In dieser frühen Studie über die theoretischen Aspekte eines synthetischen spiraligen Objekts kommt mir nicht die Aufgabe zu, den tradierten Wirbelmodellen (Potential-, Festkörper- und Rankine-Wirbel) ein viertes Modell zur Seite zu stellen. Vielmehr lege ich Wert darauf, dass die theoretischen Untersuchungen den Verdacht nahe legen, dass ein über den Ansatz Lagrange Kohärenter Systeme entwickeltes spiraliges Objekt eine Vielzahl von Geschwindigkeiten hervorzubringen vermag immer dann, wenn man die Zulässigkeit reversibler Verformungen in den Simulationsmodellen geltend voraussetzt.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

Eine wichtige Erkenntnis der vorliegenden Untersuchung ist die begründete Vermutung über die Produktivität Lagrange Kohärenter Objekte. LCO besitzen die energetische Potenz, das sie umgebende Strömungsfeld zu organisieren. Diese Potenz geht über das Wechselwirkungsgeschehen hinaus, welches sich aus der Koexistenz, ja der gegenseitigen Bedingung von Geschwindigkeiten und Drücken an einem Ort innerhalb der Systemgrenzen des betrachteten Strömungsraumes herleitet. Wir haben hier in erster Linie Geschwindigkeiten als mögliche Induktionswirkungen beschrieben. Gleichwohl hätte ich die Simulationskampagne auf Druckgradienten-Modelle auslegen können. Den Zusammenhang zwischen der generalisierten Geschwindigkeit (v/V) im Strömungsfeld und dem Druckbeiwert c_p ebendort, habe ich oben kurz angeführt.

Wenn wir nun zwingend davon ausgehen dürfen, dass die die physikalischen Ursachen der Kohärenzeigenschaften Lagrange Kohärenter Systeme starke Wechselwirkungen implizieren, dürfte überall dort, wo der Gradient der Geschwindigkeitsinduktion groß ist, auch ein hoher Druckgradient herrschen, der seinerseits zu Bewegungen der LCO-Oberflächen führen sollte. Bewegungen hin zu einem Zustand lokaler geringster innerer Energie. Das Lagrange Kohärente Objekt „rutscht quasi“ in die energetische Senke hinein. Zu vermuten ist also das typische Verhalten eines konservativen Systems, das im Falle eines Fluids weder ganz so einfach zu messen, noch zu simulieren ist. Hier liegen noch steinige Modellierungs- Simulations- und Analysepfade vor uns. Doch wenn es so wäre wie ich vermute, dass es auch ist, dann hätten wir ein Erklärungsmodell für die enorme Stabilität wirbeliger Strukturen in der Natur. Und noch mehr. Das Wechselwirkungsgeschehen aus der Induktion lokaler Drücke und der gleichzeitigen Beweglichkeit Lagrange Kohärenter Objekte, die aus konservativen Prozessen stammt, führt auf „selbst-referentielles“ Verhalten des LCO im Fluid. Immer dort, wo die Induktionswirkung intensiv ist, rückt das System (geometrisch) zusammen, was zur Folge hat, dass das Objekt weniger von der energetischen Potenz seines inneren Milieus nach aussen preisgibt. Vielleicht nicht gerade auf dieser narrativen Ebene

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

aber unter deutlicher Bezugnahme dieses poetischen Wechselwirkungsgeschehens, erwarte ich demnächst Neuigkeiten über Lagrange Kohärente Objekte.

Michel Felgenhauer im Oktober 2020

Bibliographie, Quellen und weiterführende Literatur

[Abbo-59] Ira H. Abbott, Albert E. von Doenhoff: Theory of Wing Sections: Including a Summary of Airfoil Data. Dover Publications, New York 1959.

[BaNe-98] Barthlott, W.; Neinhuis, C.: Lotusblumen und Autolacke – Ultrastruktur pflanzlicher Grenzflächen und biomimetische unverschmutzbare Werkstoffe. Biona Report 12, Schriftenreihe der Wissenschaften und der Literatur, Mainz. Gustav Fischer-Verlag, Stuttgart 1998.

[Bann-02] Bannasch, Rudolph. Vorbild Natur. In: design report 9/02, S.20ff. Blue. C Verlag Stuttgart: 2002.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

[Bapp-99] Bappert, R. Bionik, Zukunftstechnik lernt von der Natur. SiemensForum München/Berlin und Landesmuseum für Technik und Arbeit in Mannheim (Herausgeber): 1999

[Bech-93] Bechert, D.W.: Verminderung des Strömungswiderstandes durch bionische Oberflächen. In: VDI-Technologieanalyse Bionik, S. 74 – 77. VDI-Technologie-zentrum Düsseldorf 1993.

[Bech-97] Bechert, D.W., Biological Surfaces and their Technological Application. 28th AIAA Fluid Dynamics Conference: 1997

[Cal-84] Calder, W.A. (1984) Size, Function and Life History. Harvard University Press. Cambridge 431pp.

[Die 17-6] Dienst, Mi. (2017) Reihenuntersuchung zu elliptischen Profilkonturen für Leit- und Steuertragflächen. Zur Analyse der Strömungswirklichkeit von Surfboard-Finnen. GRIN-Verlag GmbH München, ISBN(e-Book): 9783668390744, ISBN(Buch): 9783668390751.

[Die 17-4] Dienst, Mi. (2017) Superperformance of Surfboard Fins. Bionik, Leistungsähnlichkeit und affine Skalierung. GRIN-Verlag GmbH München, ISBN(e-Book): 9783668377141, ISBN(Buch): 9783668377158

[Die 17-3] Dienst, Mi. (2017) Performance und Downsizing von Surfboardfinnen. Beitrag zur Phänomenologie und Strömungswirklichkeit. GRIN-Verlag GmbH München, ISBN(e-Book): 9783668374881, ISBN(Buch): 9783668374898

[Die 17-1] Dienst, Mi. (2017) Zur numerischen Analyse einer Laborfinne. Mittelschnittverfahren und Manövrierleistung. GRIN-Verlag GmbH München, ISBN(e-Book): 9783668374188, ISBN(Buch): 9783668374195.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

[Die15-7] Dienst, Mi. (2015) Dossier über die Forschung der BIONIC RESEARCH UNIT der Beuth Hochschule für Technik Berlin, GRIN-Verlag GmbH München, ISBN (e-Book): 978-3-668-02183-9, ISBN (Buch) 978-3-668-02184-6.

[Die13-3] Dienst, Mi.(2013) Reihenuntersuchung zu Profilkonturen für Leit- und Steuerflächen von Seefahrzeugen. Datenreihe ERpL2050. GRIN-Verlag GmbH München, ISBN 978-3-656-47215-5

[Die11-4] Dienst, Mi.(2011) Methoden in der Bionik. Die Reynoldsbasierte Fluidische Fitness. GRIN-Verlag GmbH München.

[Die09-4] Dienst, Mi.(2009) PhysicalModellingdrivenBionics. GRIN-Verlag München.

[DUB-95] Dubbel, Handbuch des Maschinenbaus, Springer Verlag Berlin, 15.Auflage 1995.

[Eppl-90] Richard Eppler: Airfoil Design and Data. Springer, Berlin, New York 1990.

[Fel-20] Felgenhauer, M. (2020) Die Verteilung von Induktionswirkungen Lagrange Kohärenter Objekte. Zur Topographie und Kondition von Geschwindigkeits-feldern. GRIN Verlag, München. ISBN 9783346142146

[Fel - 19-2] Felgenhauer, Mi. (2019) BIONIK UND DIGITALE BILDVERARBEITUNG
Laterale Inhibition und Aktivierung. Grin Verlag München, ISBN(e-Book) 9783668874541, ISBN(Buch): 9783668874558

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

[Fel -19-1] Felgenhauer, Mi. (2019) MATRIZENVERFAHREN ZUR DIGITALEN BILDVERARBEITUNG. Facettenaugen als Vorbild schneller Algorithmen in der Bildsynthese. Grin Verlag München

[Fli-02] Flindt, R. (2002) Biologie in Zahlen Berlin: Spektrum Akademischer Verl.

[Fren-94] French, M.: Invention and Evolution: design in nature and engineering. Cambridge University Press. Cambridge 1994.

[Fren-99] French, M.: Conceptual Design for Engineers. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokio: Springer: 1999

[Gel-10] Produktinformation, 05 2010, GELITA 69412 Eberbach. www.gelita.com

[Guen-98] Günther, B., Morgado, E. (1998) Dimensional analysis and allometric equations concerning Cope's rule. *Revista Chilena de Historia Natural* 71: 1989

[Gör-75] Görtler, H. Diemensionsanalyse. Berlin Springer 1975

[Gorr-17] Edgar Gorrell, S. Martin: Aerofoils and Aerofoil Structural Combinations. In: NACA Technical Report. Nr. 18, 1917.

[Guen-66] Günther, B., Leon, B. (1966) Theorie of biological Similarities, nondimensional Parameters and invariant Numbers. *Bulletin of Mathematical Biophysics* Volume 28, 1966.

[Gutm-89] Gutmann, W.: Die Evolution hydraulischer Konstruktionen. Verlag W. Kramer: Frankfurt am Main, 1989.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

- [Hal-10] G. Haller. (2010) A variational theory of hyperbolic Lagrangian Coherent Structures. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 240(7):574–598, 2010.
- [Hal-00] G. Haller, G. Yuan Lagrangian coherent structures and mixing in two-dimensional turbulence, Division of Applied Mathematics, Lefschetz Center for Dynamical Systems, Brown University, Providence, RI 02912, USA Received 11 February 2000;
- [Hüt-07] Hütte, 2007, 33. Auflage, Springer Verlag. S.E147
- [Hux-32] Huxley, J.S. (1932) Problems of relative Growth. London: Methuen.
- [Kar-35] Karman von, T. Burgess J.M. (1935) General aerodynamic theory: perfect fluids, In *Aerodynamic Theory* vol. II (ed. W. F. Durand), p. 308. Leipzig: Springer Verlag.
- [Katz-01] Joseph Katz, Allen Plotkin (2001) *Low-Speed Aerodynamics* (Cambridge Aerospace Series) Cambridge University Press; 2 edition (February 5, 2001)
- [Kra-86] Krasny, R. (1986) Desingularization of Periodic Vortex Sheet Roll-up. Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, 251 Mercer Street, New York, New York 10012, received November 15, 1981; revised July 25, 1985
- [Liao-03] Liao, J.C.; Beal, D.; Lauder, G.; Triantayllou, M. Fish Exploding Vortices Decrease Muscle Activity. In: *Science* 2003, S. 1566-1569. AAAS. 2003.
- [Lech-14] Lecheler, S. (2014) *Numerische Strömungsberechnung* Springer Verlag Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-658-05201-0

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

[Lun-82] T. S. Lundgren, T.S. (1982) Strained spiral vortex model for turbulent fine structure, *The Physics of Fluids* 25, 2193 (1982);
<https://doi.org/10.1063/1.863957>

[Matt-97] Mattheck, C.: Design in der Natur. RombachVerlag. Freiburg 1997.

[Mial-05] B. Mialon, M. Hepperle: "Flying Wing Aerodynamics Studies at ONERA and DLR", CEAS/KATnet Conference on Key Aerodynamic Technologies, 20.-22. Juni 2005, Bremen.

[Mof-84] Moffatt, K.H. (1984) Simple topological aspects of turbulent vorticity dynamics In: *Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids*, ed. T. Tatsumi (Elsevier) 223-230.

[Nac-01] Nachtigall, W. (2001) Biomechanik. Braunschweig: Vieweg Verlag.

[Nach-98] Nachtigall, W. : Bionik – Grundlagen und Beispiele für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1998.

[Nach-00] Nachtigall, Werner; Blüchel, Kurt. Das große Buch der Bionik. Stuttgart: Deutsche Verlags Anstalt: 2000.

[Oert-11] Oerteljr., H., Böhle, M., Reviol, Th. (2011) Strömungsmechanik, Grundlagen. Springer Verlag Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-8348-8110-6

[PaBe-93] Pahl. G.; Beitz, W.: Konstruktionslehre, 3.Auflage. Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Tokio: Springer 1993

[Pflu-96] Pflumm, W. (1996) Biologie der Säugetiere. Berlin: Blackwell Wissenschaftsverlag.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

[Rech-94] Rechenberg, Ingo. Evolutionsstrategie'94. Frommann-Holzog Verlag. Stuttgart: 1994.

[Scha-13] Schade, H. (2013) Strömungslehre. De Gruyter Verlag. ISBN-13: 978-3110292213

[Schü-02] Schütt, P., Schuck, H-J., Stimm, B. (2002) Lexikon der Baum- und Straucharten. Nikol, Hamburg, ISBN 3-933203-53-8

[Sun-16] Sun, P.N., Colagrossi, A. Marrone, S., Zhang, A.M, (2016) Detection of Lagrangian Coherent Structures in the SPH framework, College of Shipbuilding Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China; CNR-INSEAN, Marine Technology Research Institute, Rome, Italy; Ecole Centrale Nantes, LHEEA Lab. (UMR CNRS), Nantes, France.

[Tham-08] Siekmann, H.E., Thamsen, P. U. (2008) Strömungslehre Grundlagen, Springer Verlag Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-540-73727-8

[Tho-59] Thompson, D'Arcy, W. (1959) On Growth and Form. London: Cambridge University Press. (Neuaufgabe der Originalschrift 1907)

[Tho-92] Thompson, D W., (1992). *On Growth and Form*. Dover reprint of 1942 2nd ed. (1st ed., 1917). ISBN 0-486-67135-6

[Tria-95] Triantafyllou, M.: Effizienter Flossenantrieb für Schwimmroboter. In: Spektrum der Wissenschaft 08-1995, S. 66–73. Spektrum der Wissenschaft- Verlagsgesellschaft mbH, Heidelberg 1995.

[Tria-87] Triantafyllou M., Kupfer K., Bers A. (1987) Absolute instabilities and self-sustained oscillations in the wakes of circular cylinders. *Physical Review Letters* 59, 1914–1917.

[ADSCrossRefGoogle Scholar](#)

[Tria-91] Triantafyllou M., Triantafyllou G. S., Gopalskrishnan R. (1991) Wake Mechanics for Thrust Generation in Oscillating Foils, *Physics of Fluids A*, 3 (12), pp. 2835–2837. [ADSCrossRefGoogle Scholar](#)

[Tria-92] Triantafyllou M., Triantafyllou G. S., Grosenbaugh M. A. (1992) Optimal Thrust Development in Oscillating Foils with Application to Fish Propulsion, *Journal of Fluids and Structures* (Accepted for Publication) [Google Scholar](#)

[Vos-15-2] M. Voß, H.-D. Kleinschrodt, Mi. Dienst: "Experimentelle und numerische Untersuchung der Fluid-Struktur-Interaktion flexibler Tragflügelprofile", Research Day 2015 - Stadt der Zukunft Tagungsband - 21.04.2015, Mensch und Buch Verlag Berlin, S. 180- 184, Hrsg.: M. Gross, S. von Klinski, Beuth Hochschule für Technik Berlin, September 2015, ISBN:978-3-86387-595-4.

[Vos-15-1] M. Voss, P.U. Thamsen, H.-D. Kleinschrodt, Mi. Dienst (2015): "Experimental and numerical investigation on fluid-structure-interaction of auto-adaptive flexible foils", Conference on Modelling Fluid Flow (CMFF'15), Budapest, Ungarn, 1.-4. September 2015, ISBN (Buch): 978-963-313-190-9.

[Vos-15-2] M. Voss, (2015) Experimentelle und numerische Untersuchung flexibler Tragflügelprofile. Dissertation, Technische Universität Berlin 2015.

[Zie - 72] Zierep, J. (1972) Ähnlichkeitsgesetze und Modellregeln der Strömungslehre.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

Erklärung:

Alle graphischen Darstellungen sind frei von Rechten Dritter. Alle Bilder und Skizzen sind eigene Darstellungen.

Alle Berechnungsprogramme sind eigene Entwicklungen. Alle Berechnungen und Simulationsergebnisse erfolgen mit eigenen Berechnungsprogrammen. Alle Computercodes der Berechnungsprogramme sind eigene Entwicklungen.

Michel Felgenhauer ist das Pseudonym des Motorenbauers Michael Dienst aus Wiesbaden. Ich lebe und arbeite in Berlin, bin Sprecher der Bionic Research Unit der Beuth Hochschule für Technik Berlin und war seit 2003 Dozent für Bionic Engineering am Industrial Design Institut der Hochschule Magdeburg Stendal.

Martha Felgenhauer stirbt 1943 als junge Frau in Ziegenhals, Schlesien. Die sie kannten sagen, wir seien wesensverwandt. Gelegentlich also erzähle ich meiner Großmutter Geschichten aus der fröhlichen Wissenschaft.

Berlin im Sommer 2020

Bildnachweise

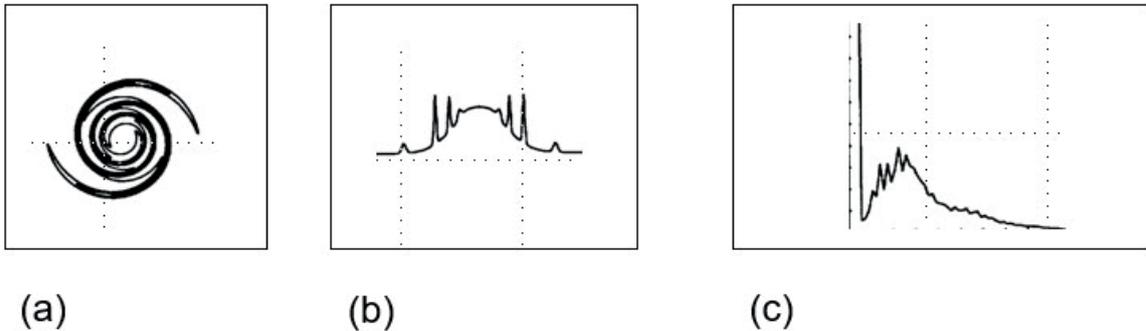


Abb.1: (a) Wirbelform, (b) Geschwindigkeitsverteilung, (c) Spektrum der Geschwindigkeit. (Skizze schematisch nach Graphiken aus: T. S. Lundgren (1982) Strained spiral vortex model for turbulent fine structure, *The Physics of Fluids* 25, 2193.)

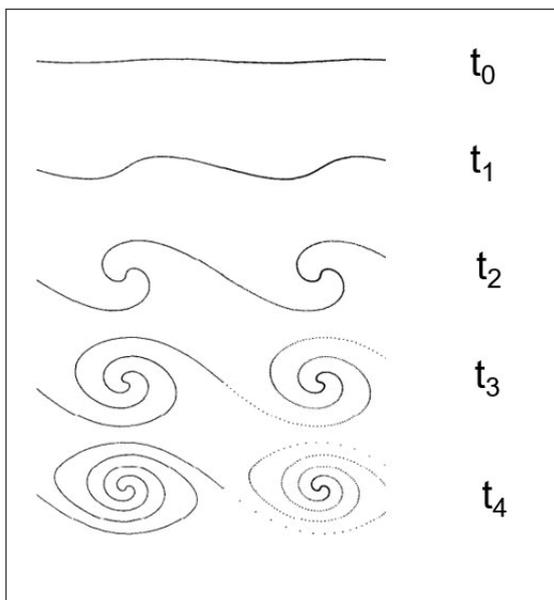


Abb. 2: Skizze schematisch nach [Kra-86]: Solution of the ordinary differential equations with $\delta = 0.5$ and $N=100$ at times $t = 0, 1, 2, 3, 4$. Interpolating curves are plotted⁶.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

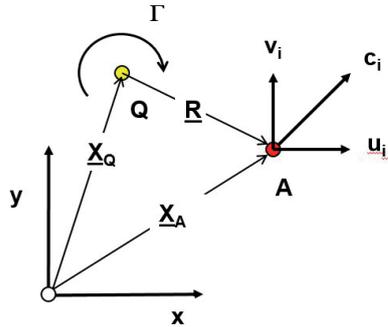


Abb.3:
Induktionseffekte. © Mi. Dienst,
Sommer 2020, alle Rechte frei von
Dritten.

	Eine SIMULATIONS-KAMPAGNE unter FlowLab⁴⁴
VOR- PROZESS	Modellbildung
	Strömungsraum beschreiben und fluidmechanische Randbedingungen
	LCS als Polygon aus externer Datei laden. LCS-Topologie festlegen und im Strömungsraum ansiedeln. Richtungs-Vektoren im Feld ermitteln.
RUN Time	Simulation
	Berechnung der lokalen Induktionseffekte Lagrange Kohärenter Strukturen im Strömungsraum; als 3D Komponenten-Vektorfeld.
NACH- PROZESS	Ergebnisse
	Resultierende Felder, Integral- und Mittelwerte. Graphische Darstellung der Simulation im Strömungsraum. Sichern der Ergebnisdaten in externen Dateien.

© Mi. Dienst, Sommer 2020, alle Rechte frei von Dritten.

⁴⁴ FlowLab ist eine Sammlung von Routinen, Prozeduren und Programmen zur Fluidmechanik in proper Code. http://bmoto.de/Flowlab_intro.html

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

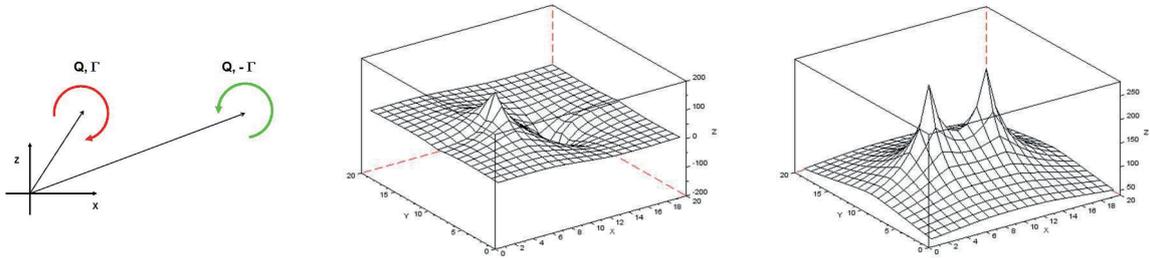


Abb.4a: Quellpunkte und LANG-reichweitige Wechselwirkung zweier Lagrange kohärenter Systeme in der in der (x-z)-Ebene des Strömungsraums. Die Zirkulationsrichtungen sind verschieden. Induzierte Geschwindigkeit, Komponente u (Mitte). Resultierende induzierte Geschwindigkeit c (rechts).

© Mi. Dienst, Sommer 2020, alle Rechte frei von Dritten.

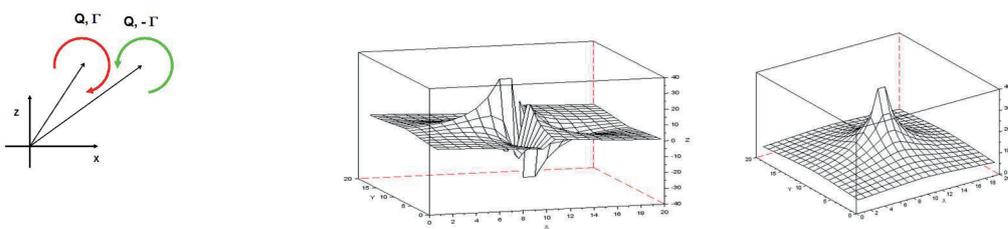


Abb.4b: Quellpunkte und KURZ-reichweitige Wechselwirkung zweier Lagrange kohärenter Systeme in der in der (x-z)-Ebene. Die Induktionswirkungen heben sich hier (scheinbar) auf.

© Mi. Dienst, Sommer 2020, alle Rechte frei von Dritten.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte



Abb. 5: Spiraliges System;
vermutlich ein LCS.

© Mi. Dienst, Sommer 2020,
alle Rechte frei von Dritten.

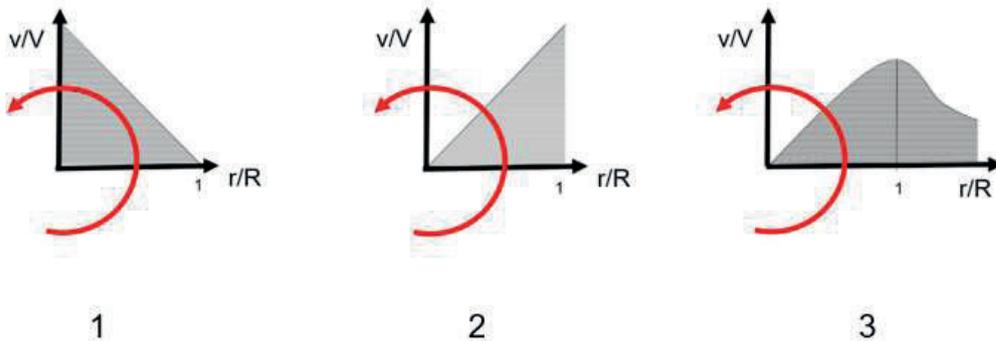


Abb.6: (1) Gradienten der generalisierten Geschwindigkeit in einem Potentialwirbel, in einem Festkörperwirbel (2) und beim Rankine-Wirbel (3).

© Mi. Dienst, Sommer 2020, alle Rechte frei von Dritten.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

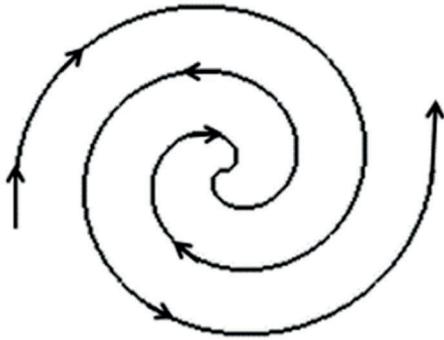


Abb.7: Fermat-Spirale

© Mi. Dienst, Sommer 2020, alle Rechte frei von Dritten.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

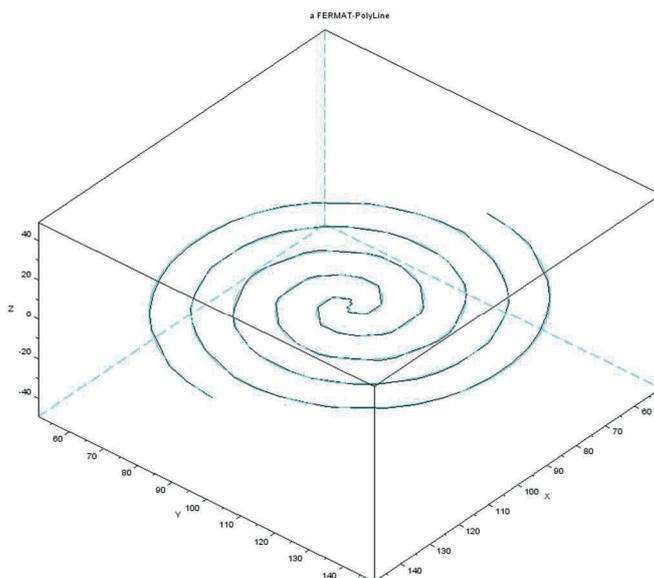
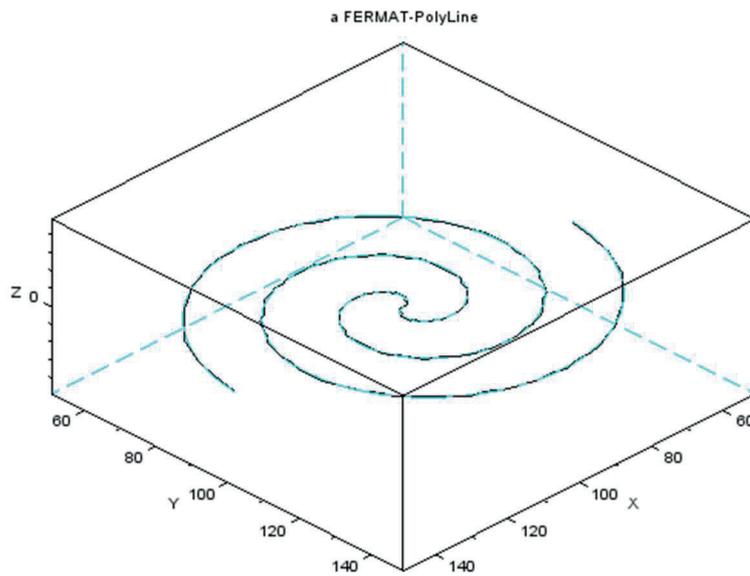


Abb.: 8. Mehrgängige Fermat-Spiralen ($n=1.5$ links, rechts $n= 3.5$). Beide Objekte bauen auf skalierbare Polygone gleicher Dimension (dim=200 Stützstellen) auf, die im Strömungsraum (200^3 Zellen) platziert werden.

© Mi. Dienst, Sommer 2020, alle Rechte frei von Dritten.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

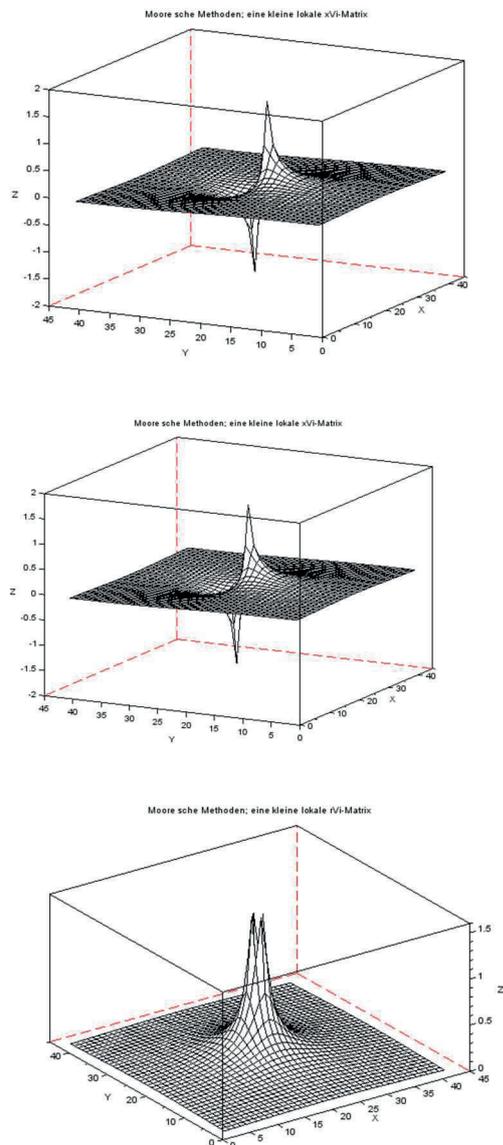


Abb.9: Moor'sche Matrize für die Y-Komponente (links) und der X-Komponente (mittig) der induzierten Geschwindigkeit. Die lokale resultierende induzierte Geschwindigkeit (rechts).

© Mi. Dienst, Sommer 2020, alle Rechte frei von Dritten

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

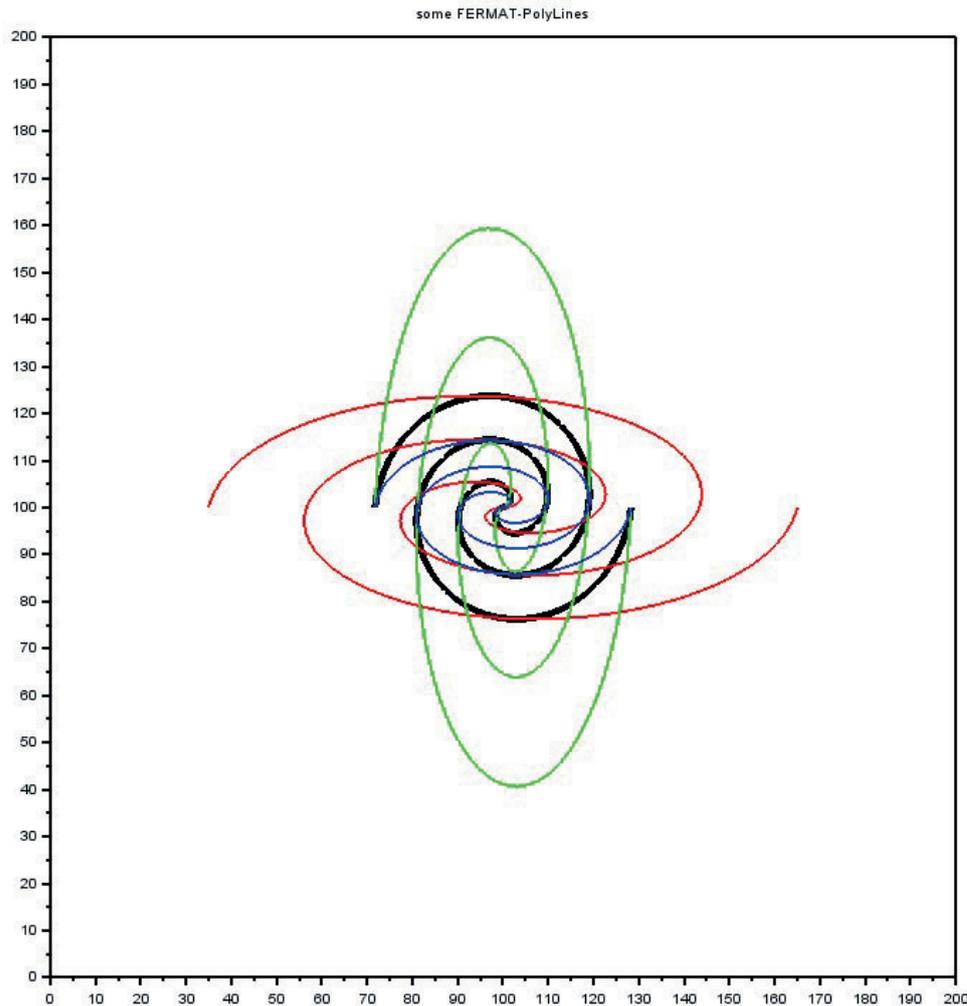


Abb.10: Variationen einer ebenen Fermat-Spirale.

SCHWARZ: Phänomenologie einer Fermat-Spirale (D-LCO);

ROT: Transformation in X-Richtung (Dehnung, LD-LCO);

GRÜN: Transformation in Y-Richtung (Dehnung, LD-LCO);

BLAU: Transformation in Y-Richtung (HD, Stauchung). Die Transformierten haben die gleiche Dimension und besitzen in der Ebene gemeinsame Punkte.

© Mi. Dienst, Sommer 2020, alle Rechte frei von Dritten.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

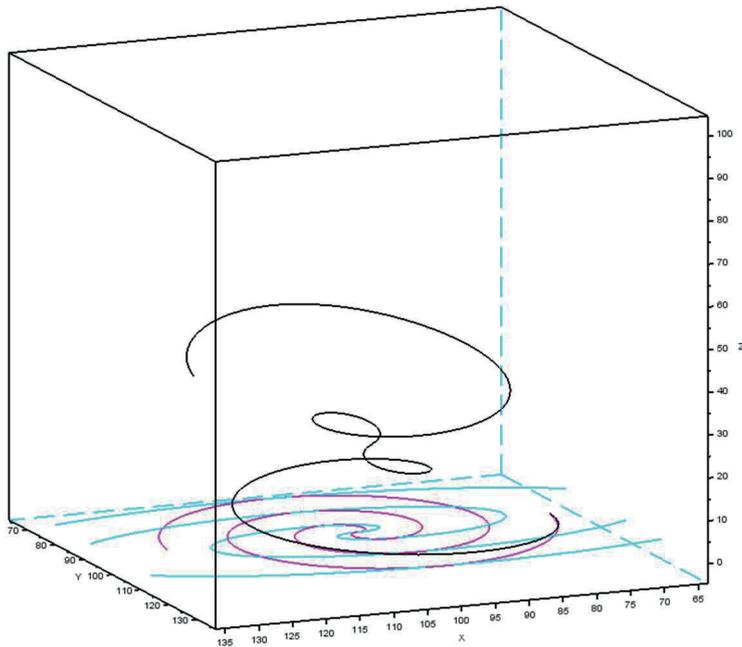


Abb.11: Homomorphe Variationen von Fermat-Spiralen im Raum. MAGENTA: Phänomenologie der ebenen Fermat-Spirale; TÜRKIS: Transformation in X-Richtung (Dehnung, LD-LCO); SCHWARZ: Transformation in Z-Richtung. Die Transformierten haben die gleiche Dimension.

© Mi. Dienst, Sommer 2020, alle Rechte frei von Dritten.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

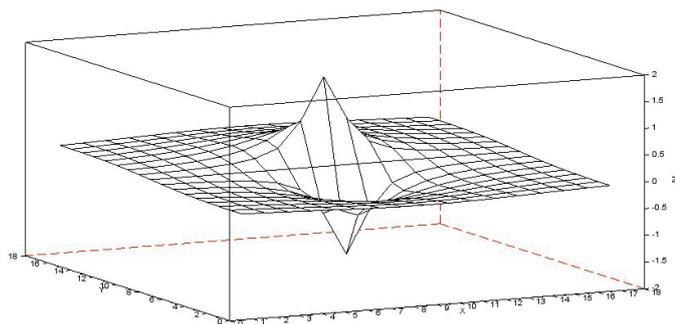


Abb. 12: Die Moor'sche Matrix der Induktions-wirkungen.
© Mi. Dienst, Sommer 2020, alle Rechte frei von Dritten.

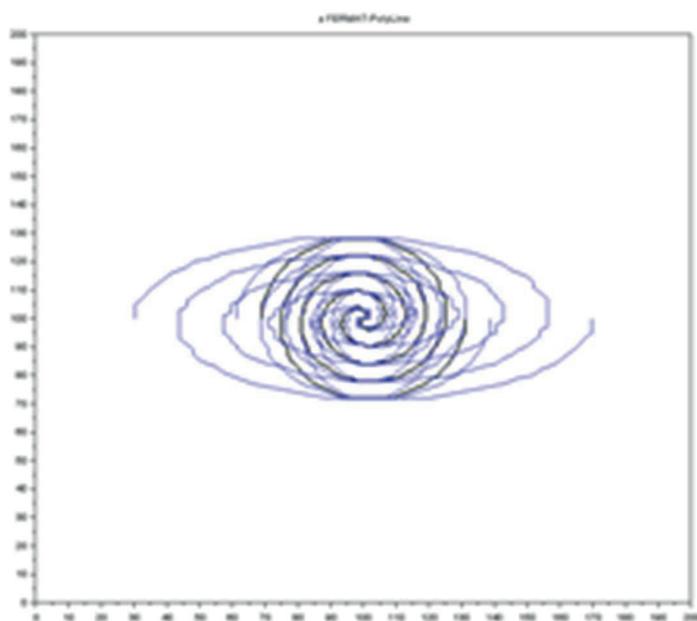


Abb.13: Laterale Deformation einer Fermat-Spirale.
Ausgehend von der zentralsymmetrischen Form wird das Lagrange
Kohärente Objekt sukzessive entlang der X-Achse deformiert.

© Mi. Dienst, Sommer 2020, alle Rechte frei von Dritten.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

Impuls-, Energie-, und Leistungs-Äquivalente der deformierten Fermat-Spirale								
Äquivalent		Geschwindigkeit		Impuls	Energie	Leistung	ImpulsX	ImpulsY
		Σv_{XINDUZ} brutto	Σv_{YINDUZ} brutto	$F(v_{rINDUZ})$	$F(v^2_{INDUZ})$	$F(v^3_{INDUZ})$	abs(vixp) netto	abs(viyp) netto
	dfx, dfy	$m s^{-1}$	$m s^{-1}$	$m s^{-1}$	$m^2 s^{-2}$	$m^3 s^{-3}$	$m s^{-1}$	$m s^{-1}$
Zirkular	-0.25	281485	279459	54919	924755	23239533	35885	37126
	0	281486	279460	64212	902825	18342507	42103	44176
	0.25	281486	279460	75389	930718	16119317	48918	52197
	0.5	281487	279460	83029	850342	11898767	53788	57391
	0.75	281487	279460	91132	802858	9611204	59291	62437
	1.0	281487	279461	104570	868570	9699230	68421	71273
	1.25	281487	279461	122028	1000394	10889976	80216	83060
	dfx							
elliptisc	0	281486	279460	64212	902825	18342507	42103	44176
	1.0	229212	320581	76150	829803	13025952	51668	49517
	1.5	213055	329405	83133	898014	14053865	56644	52945
Berechnungsfeld: 200^3 Stützstellen, Zirkulation $\Gamma = 10 [m^2/s]$, Diffusion $\varepsilon = 20 [LE]$								

© Mi. Dienst, Sommer 2020, alle Rechte frei von Dritten.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

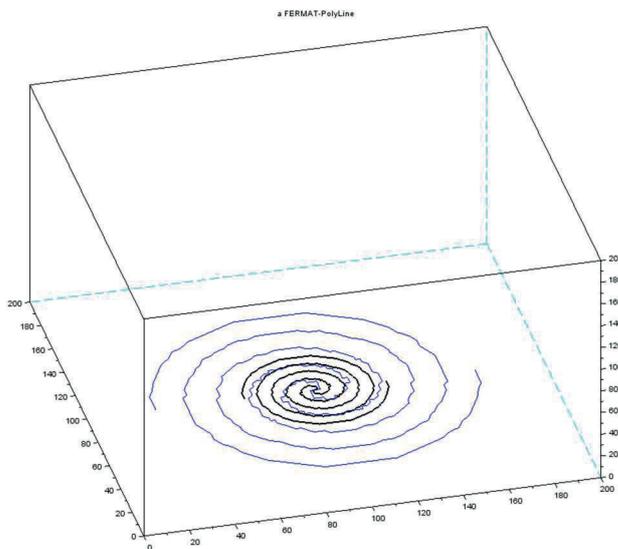
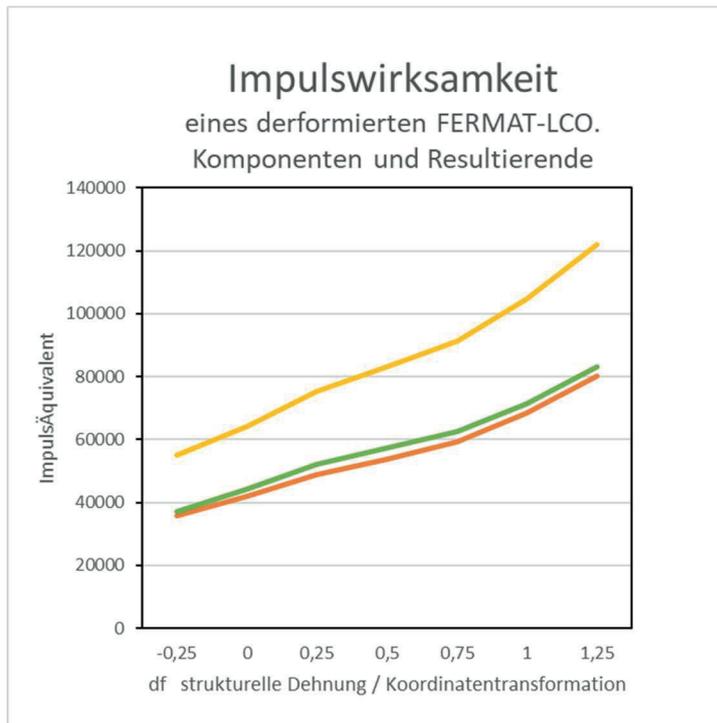


Abb.14: Impulswirksamkeit. Resultierende (gelb) und Komponenten des Impulsäquivalents (links). Unterschiedlich stark verformte Fermat-Spiralen vom bilateralen Typ (rechts).

© Mi. Dienst, Sommer 2020, alle Rechte frei von Dritten.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

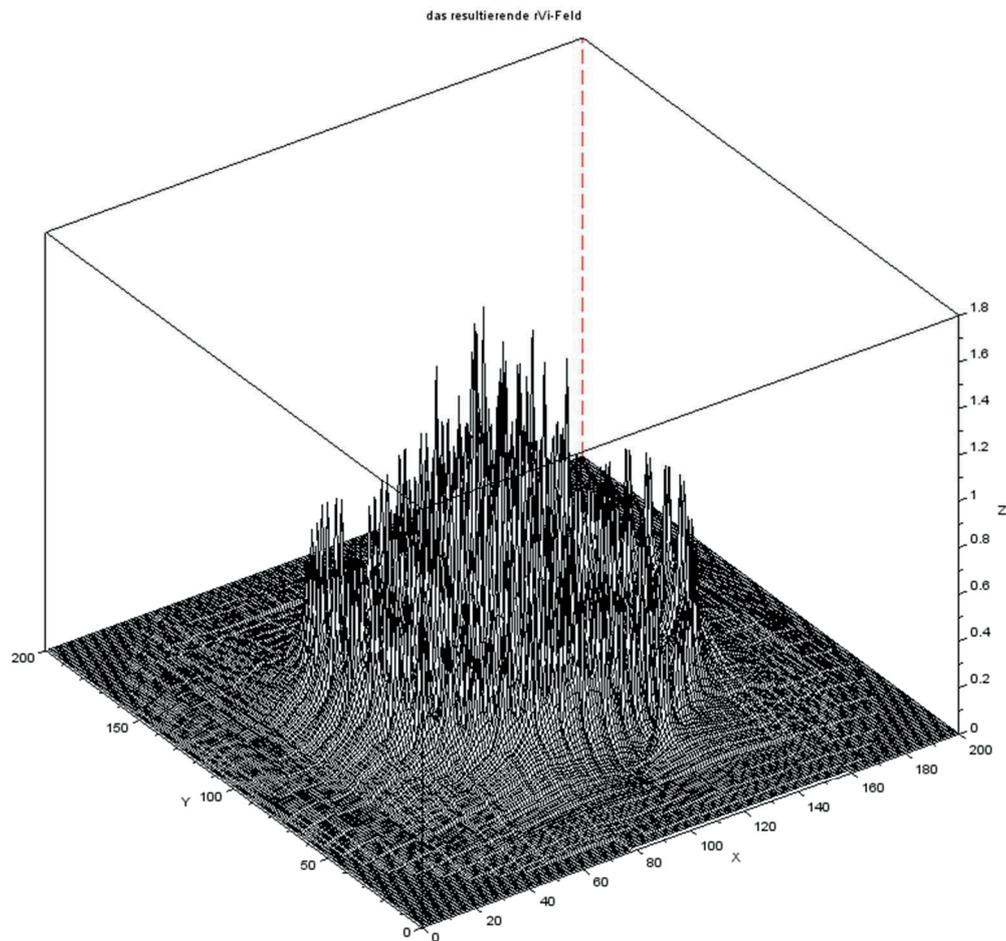


Abb.15: Das resultierende Impulsäquivalent, respektive die resultierende induzierte Geschwindigkeit für eine bilateral deformierte FERMAT-Spirale ($df_x=df_y=1.0$).

© Mi. Dienst, Sommer 2020, alle Rechte frei von Dritten.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

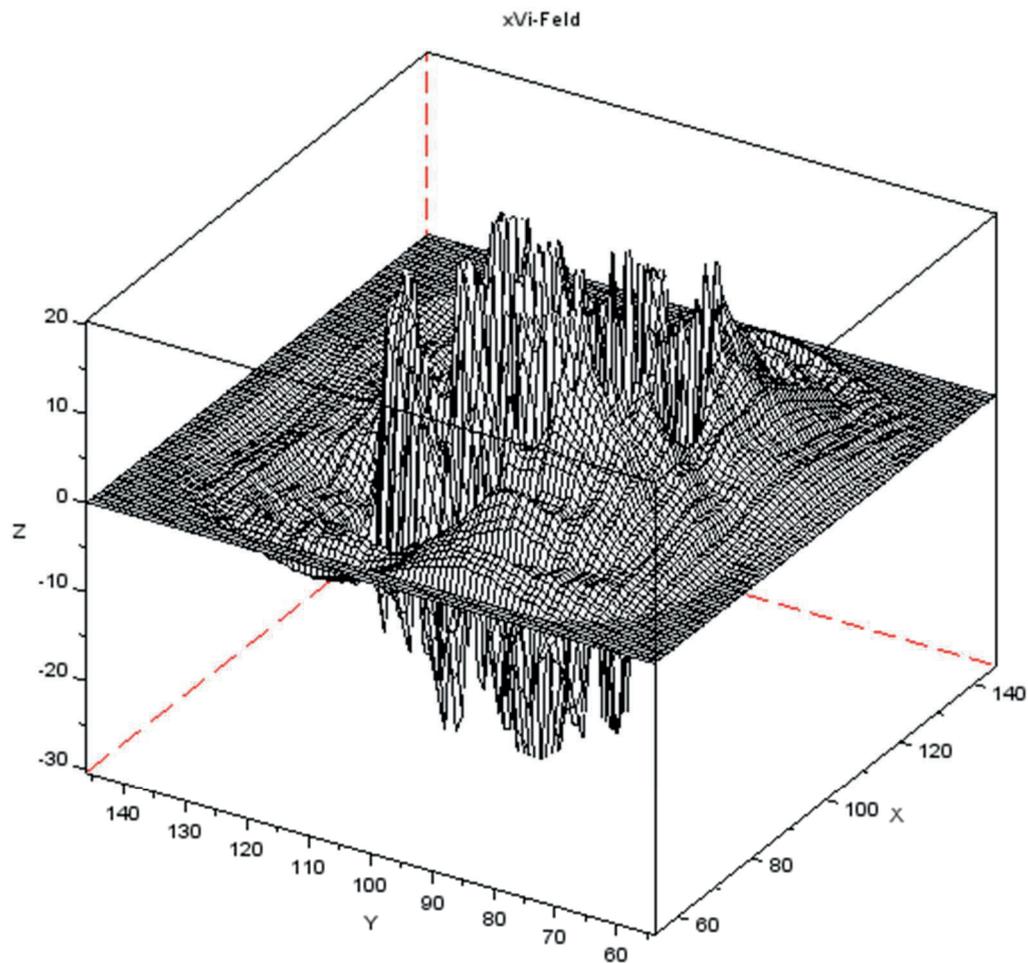


Abb.16: Die X-Komponente des resultierenden Impulsäquivalents, respektive die Komponente der induzierten Geschwindigkeit für eine bilateral deformierte FERMAT-Spirale ($df_x=df_y=-0.25$).

© Mi. Dienst, Sommer 2020, alle Rechte frei von Dritten.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

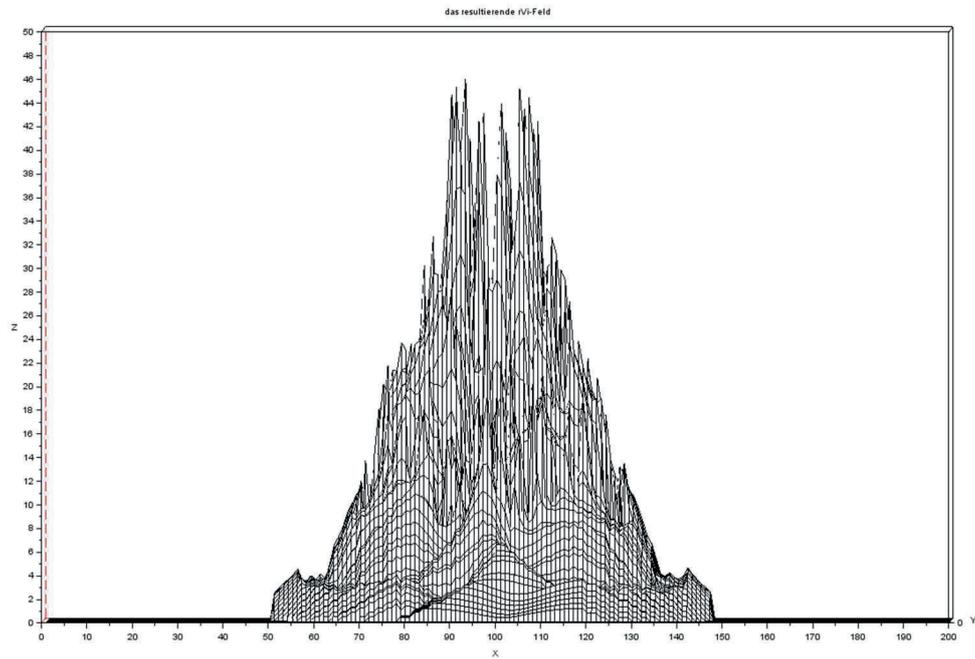


Abb.17: Die Resultierende des Impulsäquivalents, respektive die resultierende induzierte Geschwindigkeit für eine unverformte FERMAT-Spirale ($df_x=df_y=0$).

© Mi. Dienst, Sommer 2020, alle Rechte frei von Dritten.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

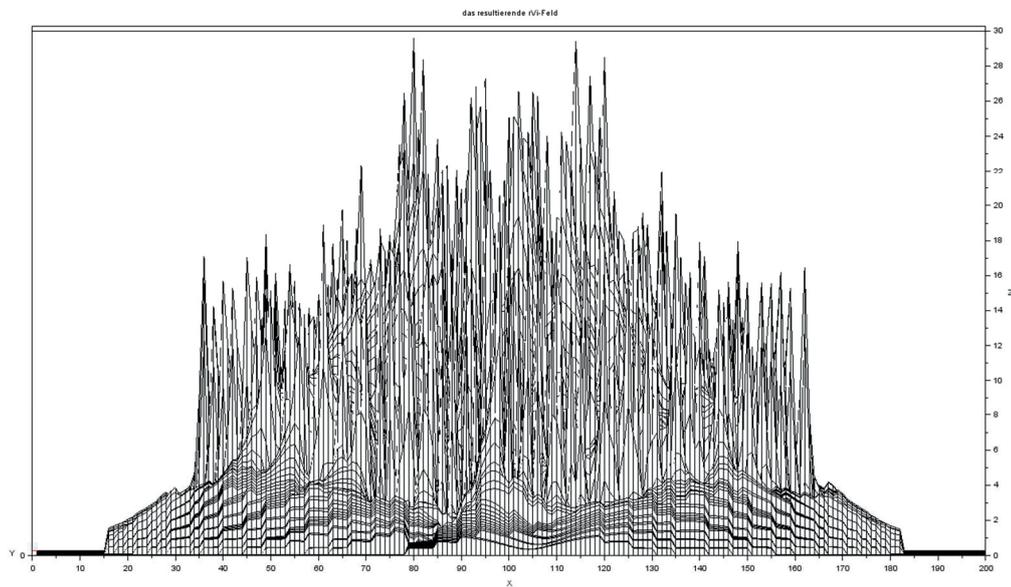


Abb.18: Die Resultierende des Impulsäquivalents, respektive die resultierende induzierte Geschwindigkeit für eine bilateral hochverformte FERMAT-Spirale ($df_x=df_y=1.25$).

© Mi. Dienst, Sommer 2020, alle Rechte frei von Dritten.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

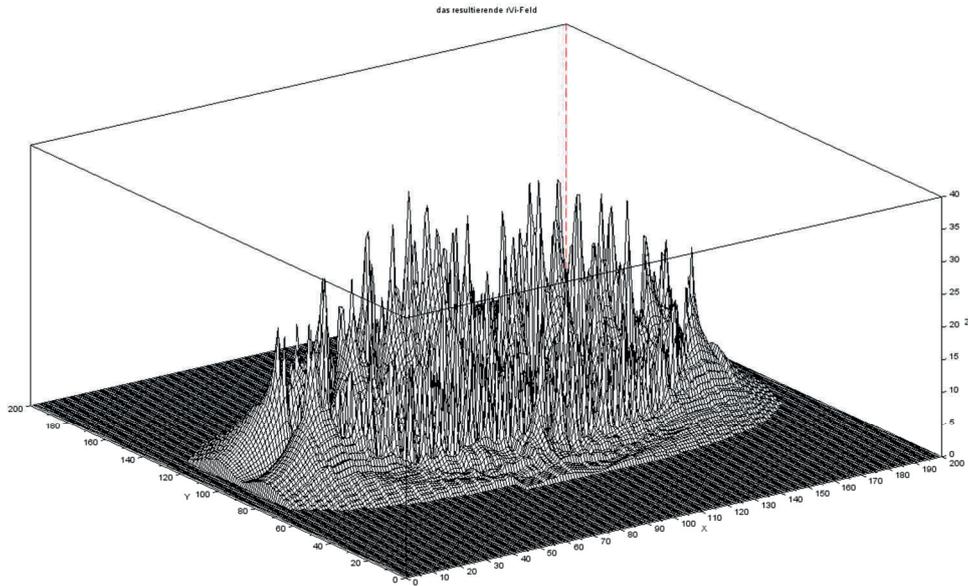


Abb.19: Die Resultierende des Impulsäquivalents, respektive die resultierende induzierte Geschwindigkeit für eine lateral hochverformte FERMAT-Spirale ($df_x=0$, $df_y=1.5$).

© Mi. Dienst, Sommer 2020, alle Rechte frei von Dritten.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

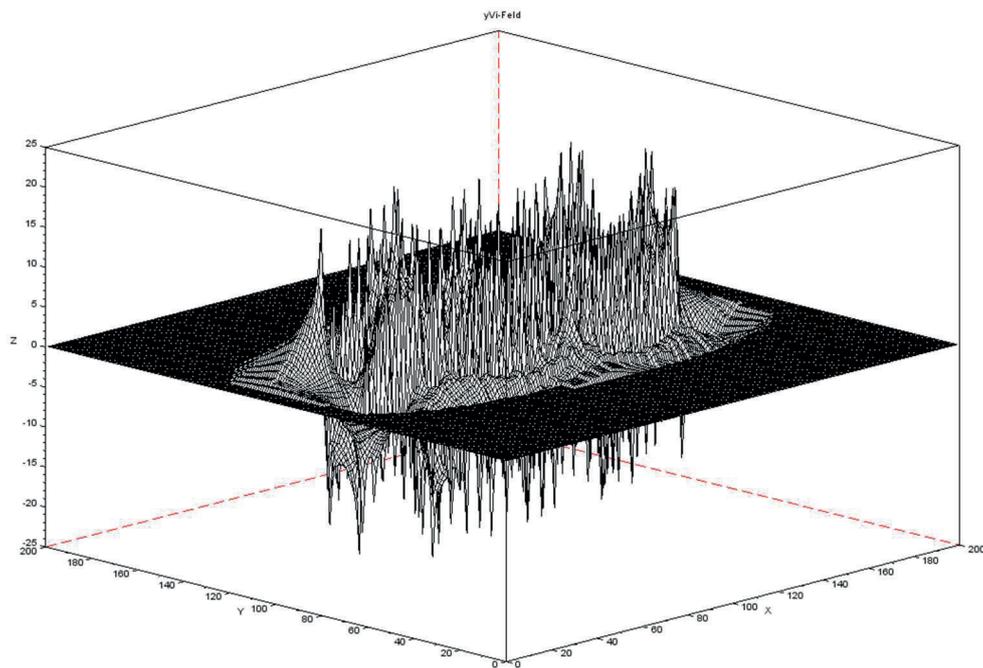


Abb.20: Die Y-Komponente des resultierenden Impulsäquivalents, respektive die Y-Komponente der induzierten Geschwindigkeit für eine lateral deformierte FERMAT-Spirale ($df_x=0$, $df_y=1.5$).

© Mi. Dienst, Sommer 2020, alle Rechte frei von Dritten.

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

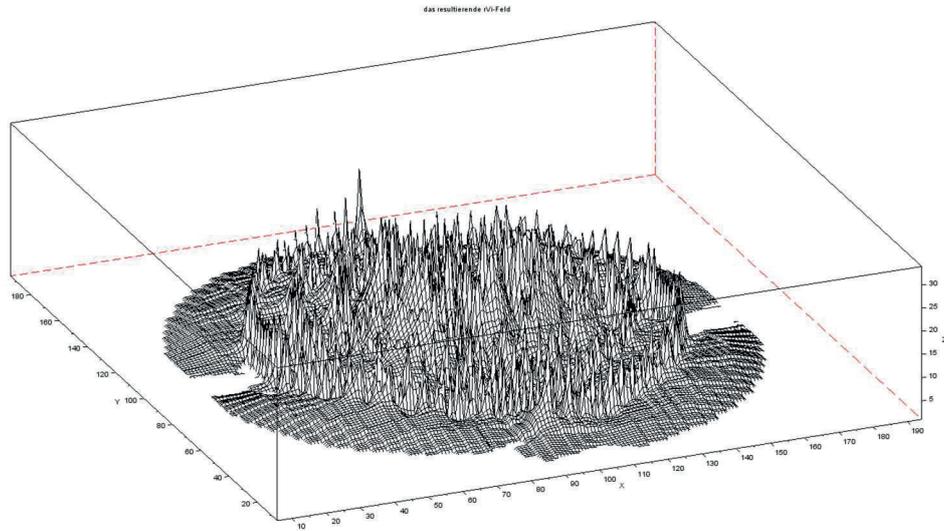


Abb. 21: Einblick auf das graduelle „innere Milieu“ einer Induktionswirkung für eine hochverformte Fermat-Spirale ($dfx=1.25$, $dfy=1.25$).

© Mi. Dienst, Sommer 2020, alle Rechte frei von Dritten.

Code

Scilab ist ein umfangreiches, leistungsfähiges und freies Softwarepaket für Anwendungen aus der numerischen Mathematik, das ehemals am Institut national de recherche en informatique et en automatique (INRIA) in Frankreich seit 1990 als Alternative zu MATLAB entwickelt wurde und seit 2003 vom Scilab-Konsortium weiterentwickelt wird. Im Juli 2008 schloss sich das Scilab-Konsortium der Digiteo Foundation an; seit Juli 2012 erfolgt die Herausgabe und Entwicklung durch Scilab Enterprises. 2017 wurde *Scilab Enterprises* von der Firma ESI Group akquiriert.

<https://de.wikipedia.org/wiki/Scilab>

Der hier auszugsweise hinterlegte Computercode ist frei von Rechten Dritter und frei verfügbar für Dritte. Der Code ist ausschließlich für wissenschaftliche Zwecke zu nutzen. Für fehlerhaften Code oder Mehrfachnennungen wird keinerlei Verantwortung übernommen.

© Mi. Dienst, Sommer 2020,

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

```
// #####  
// #####  
// #####  
// ##### 2D LCO-TENSORING und Simulation #####  
// #####  
// ##### Lagrange Coherent Objects (LCO) #####  
// ##### 3D-Berechnungen mit PotentialTheorie #####  
// #####  
// ##### V.:0035 vom 03082020 #####  
// ##### VollVersion aus: #####  
// ##### XLCS_WORKBENCH u. LCO3D-Simulation... #####  
// ##### bionic research unit berlin #####  
// #####  
// #####
```

```
##### DATA I/O #####
```

```
function test=putKOOfile(R, putpath); // IO getestet OK  
global DONE BUSY PROCESS  
fprintfMat(putpath,R); // Sicherheit.. Startvektor speichern  
test= DONE; disp(putpath,"put a POLYGON-File = DONE");  
endfunction;
```

```
function test=putMATfile(M, putpath); // IO getestet OK  
global DONE BUSY PROCESS  
fprintfMat(putpath,M); // Sicherheit.. Startvektor speichern  
test= DONE; disp(putpath,"put a MAP = DONE");  
endfunction;
```

```
function getFILE=getMATfile(getpath); // IO getestet OK  
global DONE BUSY PROCESS  
[getFILE]= fscanfMat(getpath); // Eine hübsche KnotenStruktur holen und...  
test= DONE; disp(getpath,"get a MAP = DONE");  
endfunction;
```

```
function NODE=getKOOfile(getpath); // IO  
global DONE BUSY PROCESS  
[NODE]= fscanfMat(getpath); // Eine hübsche KnotenStruktur holen und...  
vdim = size(NODE); dim=vdim(1); // Daten zeigen  
test= DONE;  
endfunction;
```

```
##### GRAPHIK I/O #####
```

```
function test=ShoMyField3D(showframe, outext, FLD);  
global DONE BUSY PROCESS  
test = BUSY;  
mSiz= size(FLD); im = mSiz(1); km = mSiz(2); // disp(m)  
// ##### OPERATOR mit eigener Analyse-Graphik. ###  
if showframe>0.0 then  
f=scf(showframe); clf(showframe);  
f.color_map = rainbowcolormap(256); // geht so  
// FLD = (-1) * FLD;  
mesh(FLD);title(outext);  
end;  
test = DONE;  
endfunction;
```

```
function test=ShoLineofMyField3D(showframe, outext, FLD, si1, sk1, si2, sk2);  
global DONE BUSY PROCESS  
test = BUSY;  
mSiz= size(FLD); im = mSiz(1); km = mSiz(2); // disp(m)  
// ##### OPERATOR mit eigener Analyse-Graphik. ###
```

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

```

if showframe>0.0 then
    f=scf(showframe); clf(showframe);
    f.color_map = rainbowcolormap(256); // geht so
    // FLD = (-1)*FLD;
    mesh(FLD);title(outext);
    S = FLD(si1:si2,sk1:sk2);
end;
test = DONE;
endfunction;

function test=ShoMyColorField3D(showframe, outext, FLD);
global DONE BUSY PROCESS
test = BUSY;
    mSiz= size(FLD); im = mSiz(1); km = mSiz(2); // disp(m
// ##### OPERATOR mit eigener Analyse-Graphik. ###
if showframe>0.0 then
    f=scf(showframe); clf(showframe);
    maxof=50;
    f.color_map = rainbowcolormap(maxof); // geht so
    FLD = 10+ 1.2*FLD;
    //mesh(FLD);title(outext);
    Matplot(FLD); title(outext);
end;
test = DONE;
endfunction;

#####
##### proper LCO generieren und sichern #####
#####

function [X, Y, Z]=CIRCE(rr, Ra, Ri, bdim, xc, yc, zc); //Test: rr=Richtung, Ri,Ra=Radien, xc,yc,zc =Center.
global DONE BUSY PROCESS
test = BUSY;
    X = zeros(2*bdim); Y=X; Z=X;
    if rr<0 then fi=linspace((2*3.14),0,bdim); else fi=linspace(0,(2*3.14),bdim); end;
    for n=1:bdim X(n) = Ra*cos(fi(n)); Y(n) = Ra*sin(fi(n)); Z(n) = 0.0; end;
    if rr<0 then fi=linspace(0,(2*3.14),bdim); else linspace((2*3.14),0,bdim); end;
    for n=1:bdim X(n+bdim) = Ri*cos(fi(n)); Y(n+bdim) = Ri*sin(fi(n)); Z(n+bdim) = 0.0; end;
    X=X+xc; Y=Y+yc; Z=Z+zc;
test= DONE;
endfunction;

function [X, Y, Z]=SPIRA(rr, Ra, Ri, f, nz, bdim, xc, yc, zc); // Test = OK
global DONE BUSY PROCESS
test = BUSY;
    X = zeros(2*bdim); Y=X; Z=X; // n=2;
    fi=linspace((nz*2*3.14),0,bdim);
    for n=1:bdim X(n) = fi(n)*f*Ra*cos(fi(n)); Y(n) = fi(n)*f*Ra*sin(fi(n)); Z(n) = 0.0; end;
    fi=linspace(0,(nz*2*3.14),bdim);
    for n=1:bdim X(n+bdim) = fi(n)*f*Ri*cos(fi(n)); Y(n+bdim) = fi(n)*f*Ri*sin(fi(n)); Z(n+bdim) = 0.0; end;
    X=X+xc; Y=Y+yc; Z=Z+zc;
test= DONE;
endfunction;

function [X, Y, Z]=FERMAT(Ra, f, nz, bdim, xc, yc, zc); // Test = OK
global DONE BUSY PROCESS
test = BUSY;
    X = zeros(bdim); Y=X; Z=X; b2dim = round(bdim); anf=0:0; //anf=3.14;
    fi=linspace((nz*2*3.14),0,b2dim);
    for n=1:b2dim X(n) = fi(n)*f*Ra*cos(fi(n)); Y(n) = fi(n)*f*Ra*sin(fi(n)); Z(n) = 0.0; end;
    fi=linspace(0,(anf+nz*2*3.14),b2dim);
    for n=1:bdim X(n+b2dim) = -fi(n)*f*Ra*cos(fi(n)); Y(n+b2dim) = -fi(n)*f*Ra*sin(fi(n)); Z(n+b2dim) = 0.0; end;
    X=X+xc; Y=Y+yc; Z=Z+zc;
test= DONE;
endfunction;

```

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

```
function outpolygon=TRANSFORMpolygon_TRANS(inpolygon, dx, dy, dz); // Test = OK
global DONE BUSY PROCESS
test = BUSY;
psiz=size(inpolygon); pdim=psiz(1); vdim=psiz(2); lastp=pdim;
for ip=1:lastp // ##### alle Berechnungen am PunkteTripel
    X=inpolygon(ip,1); Y=inpolygon(ip,2); Z=inpolygon(ip,3); //Punkte
    neuX = X+dx; neuY = Y+dy; neuZ = Z+dz;
    //outpolygon(ip,1)=round(neuX); outpolygon(ip,2)=round(neuY); outpolygon(ip,3)=round(neuZ);
    outpolygon(ip,1)=(neuX); outpolygon(ip,2)=(neuY); outpolygon(ip,3)=(neuZ);
end;
test = DONE;
endfunction;
```

```
function outpolygon=TRANSFORMpolygon_STRETCH(inpolygon, fx, fy, fz, xc, yc, zc); // Test = OK
global DONE BUSY PROCESS
test = BUSY;
psiz=size(inpolygon); pdim=psiz(1); vdim=psiz(2); lastp=pdim;
for ip=1:lastp // ##### alle Berechnungen am PunkteTripel
    X=inpolygon(ip,1); Y=inpolygon(ip,2); Z=inpolygon(ip,3); //Punkte
    dX=X-xc; dY=Y-yc; dZ=Z-zc;
    neuX = X + dX*fx; neuY = Y + dY*fy; neuZ = Z + dZ*fz;
    //outpolygon(ip,1)=round(neuX); outpolygon(ip,2)=round(neuY); outpolygon(ip,3)=round(neuZ);
    outpolygon(ip,1)=(neuX); outpolygon(ip,2)=(neuY); outpolygon(ip,3)=(neuZ);
end;
test = DONE;
endfunction;
```

```
function outpolygon=TRANSFORMpolygon_CNTRCT(inpolygon, fx, fy, fz, xc, yc, zc); // Test = OK
global DONE BUSY PROCESS
test = BUSY;
psiz=size(inpolygon); pdim=psiz(1); vdim=psiz(2); lastp=pdim;
for ip=1:lastp // ##### alle Berechnungen am PunkteTripel
    X=inpolygon(ip,1); Y=inpolygon(ip,2); Z=inpolygon(ip,3); //Punkte
    dX=X-xc; dY=Y-yc; dZ=Z-zc;
    neuX = X - dX*fx; neuY = Y - dY*fy; neuZ = Z - dZ*fz;
    //outpolygon(ip,1)=round(neuX); outpolygon(ip,2)=round(neuY); outpolygon(ip,3)=round(neuZ);
    outpolygon(ip,1)=(neuX); outpolygon(ip,2)=(neuY); outpolygon(ip,3)=(neuZ);
end;
test = DONE;
endfunction;
```

```
function outpolygon=TRANSFORMpolygon_MAGNET(inpolygon, fu, fv, fw, xc, yc, zc); // Test = OK
global DONE BUSY PROCESS
test = BUSY;
psiz=size(inpolygon); pdim=psiz(1); vdim=psiz(2); lastp=pdim; A=1;
for ip=1:lastp // ##### alle Berechnungen am PunkteTripel
    X=inpolygon(ip,1); Y=inpolygon(ip,2); Z=inpolygon(ip,3); //Punkte
    dX=X-xc; dY=Y-yc; dZ=Z-zc; R=sqrt(dX^2+dY^2+dZ^2)^0.5;
    du=dX*A/R^1; dv=dY*A/R^1; dw=dZ*A/R^1;
    neuX = X -du*fu; neuY = Y - dv*fv; neuZ = Z -dw*fw;
    //outpolygon(ip,1)=round(neuX); outpolygon(ip,2)=round(neuY); outpolygon(ip,3)=round(neuZ);
    outpolygon(ip,1)=(neuX); outpolygon(ip,2)=(neuY); outpolygon(ip,3)=(neuZ);
end;
test = DONE;
endfunction;
```

```
function outpolygon=TRANSFORMpolygon_SCRAMBL(inpolygon, nz, fu, fv, fw, xc, yc, zc); // Test = OK
global DONE BUSY PROCESS
test = BUSY;
psiz=size(inpolygon); pdim=psiz(1); vdim=psiz(2); lastp=pdim; A=1;
fi=linspace(0,(nz*2*3.14),pdim);
for ip=1:lastp // ##### alle Berechnungen am PunkteTripel
    X=inpolygon(ip,1); Y=inpolygon(ip,2); Z=inpolygon(ip,3); //Punkte
```

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

```

dX=X-xc; dY=Y-yc; dZ=Y-zc; R=sqrt(dX^2+dY^2+dZ^2)^0.5; fii=fi(ip);
du=fii*dX*fu/R^1; dv=fii*dY*fV/R^1; dw=fii*dZ*fw/R^1;
neuX = X -du;      neuY = Y - dv;      neuZ = Z -dw;
//outpolygon(ip,1)=round(neuX); outpolygon(ip,2)=round(neuY); outpolygon(ip,3)=round(neuZ);
outpolygon(ip,1)=(neuX); outpolygon(ip,2)=(neuY); outpolygon(ip,3)=(neuZ);
end;
test = DONE;
endfunction;

```

```

function outpolygon=TRANSFORMpolygon_SCREW(inpolygon, nz, fu, fv, fw, xc, yc, zc); // Test = OK
global DONE BUSY PROCESS
test = BUSY;
psiz=size(inpolygon); pdim=psiz(1); vdim=psiz(2); lastp=pdim; A=1;
fi=linspace(0,(nz*2*3.14),pdim);
for ip=1:lastp //##### alle Berechnungen am PunkteTripel
    X=inpolygon(ip,1); Y=inpolygon(ip,2); Z=inpolygon(ip,3); //Punkte
    dX=X-xc; dY=Y-yc; dZ=Y-zc; R=sqrt(dX^2+dY^2+dZ^2)^0.5; fii=fi(ip);
    //du=cos(fii)*fu/R^1; dv=sin(fii)*fv/R^1; dw=(fii)*fw/R^1;
    du=ip*fu/R^nz; dv=ip*fv/R^nz; dw=ip*fw/R^nz;
    neuX = X -du;      neuY = Y - dv;      neuZ = Z -dw;
    //outpolygon(ip,1)=round(neuX); outpolygon(ip,2)=round(neuY); outpolygon(ip,3)=round(neuZ);
    outpolygon(ip,1)=(neuX); outpolygon(ip,2)=(neuY); outpolygon(ip,3)=(neuZ);
end;
test = DONE;
endfunction;

```

```

#####
##### RichtungsTensor #####
#####

```

```

function outpgon=polygon2Rpolygon_beta(inpgon); // Test = OK
global DONE BUSY PROCESS
test = BUSY;
psiz=size(inpgon); pdim=psiz(1); vdim=psiz(2); lastp=pdim-1; pivot= 0.00001;
outpgon = inpgon;
phipgon = inpgon;
for ip=1:pdim outpgon(ip,1:vdim)=0.0; phipgon(ip,1:vdim)=0.0;end;
for ip=1:lastp
    //##### alle Berechnungen am PunkteDupel
    X=inpgon(ip,1); Y=inpgon(ip,2); Z=inpgon(ip,3); //Punkte
    dX=inpgon(ip+1,1)- X; dY=inpgon(ip+1,2)- Y; dZ=inpgon(ip+1,3)- Z; //Abstände
    RR = sqrt(dX^2 + dY^2 + dZ^2); R=RR+pivot;
    phixy = asin(dY/R); phipgon(ip,1)=phixy;
    phiyz = asin(dZ/R); phipgon(ip,2)=phiyz;
    phixz = asin(dX/R); phipgon(ip,3)=phixz;
    Rnorm = 1.0; scal = Rnorm/R; //##generalisieren
    dXnorm=scal*dX; outpgon(ip,1)=dXnorm;
    dYnorm=scal*dY; outpgon(ip,2)=dYnorm;
    dZnorm=scal*dZ; outpgon(ip,3)=dZnorm;
end;
test = DONE;
endfunction;

```

```

function outpgon=polygon2Rpolygon(inpgon); // Test = OK
global DONE BUSY PROCESS
test = BUSY;
psiz=size(inpgon); pdim=psiz(1); vdim=psiz(2); lastp=pdim-1; pivot= 0.00001;
outpgon = inpgon;
phipgon = inpgon;
for ip=1:pdim outpgon(ip,1:vdim)=0.0; phipgon(ip,1:vdim)=0.0;end;
for ip=1:lastp
    //##### alle Berechnungen am PunkteDupel
    X=inpgon(ip,1); Y=inpgon(ip,2); Z=inpgon(ip,3); //Punkte
    dX=inpgon(ip+1,1)- X; dY=inpgon(ip+1,2)- Y; dZ=inpgon(ip+1,3)- Z; //Abstände

```

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

```
RR = sqrt(dX^2 + dY^2 + dZ^2); R=RR+pivot;
phixy = asin(dY/R);  phipgon(ip,1)=phixy;
phiyz = acos(dZ/R);  phipgon(ip,2)=phiyz;
phixz = asin(dX/R);  phipgon(ip,3)=phixz;
Rnorm = 1.0; scal = Rnorm/R; ###generalisieren
dXnorm=scal*dX;      outpgon(ip,1)=dXnorm;
dYnorm=scal*dY;      outpgon(ip,2)=dYnorm;
dZnorm=scal*dZ;      outpgon(ip,3)=dZnorm;
end;
test = DONE;
endfunction;

function outpgon=Opolygon2Spolygon(inpgon); // Test = OK
global DONE BUSY PROCESS
test = BUSY;
psiz=size(inpgon); pdim=psiz(1); vdim=psiz(2); lastp=pdim-1; pivot= 0.00001;
outpgon = inpgon;
hipgon = inpgon;
for ip=1:pdim outpgon(ip,1:vdim)=0.0; hipgon(ip,1:vdim)=0.0;end;
for ip=1:lastp
  // ##### alle Berechnungen am PunkteTripel
  X=inpgon(ip,1); Y=inpgon(ip,2); Z=inpgon(ip,3); //Punkte
  dX=inpgon(ip+1,1)- X; dY=inpgon(ip+1,2)- Y; dZ=inpgon(ip+1,3)- Z; //Abstände
  RR = sqrt(dX^2 + dY^2 + dZ^2); R=RR+pivot;
  outpgon(ip,1)=dX;
  outpgon(ip,2)=dY;
  outpgon(ip,3)=dZ;
end;
test = DONE;
endfunction;

function outpgon=Spolygon2Opolygon(inpgon, xs, ys, zs); // Test = OK
global DONE BUSY PROCESS
test = BUSY;
psiz=size(inpgon); pdim=psiz(1); vdim=psiz(2); lastp=pdim-1; pivot= 0.00001;
//outpgon = inpgon; hipgon = inpgon;
for ip=1:pdim outpgon(ip,1:vdim)=0.0; end;

X = xs; Y=ys; Z=zs;
for ip=1:lastp
  DX = inpgon(ip,1); DY = inpgon(ip,2); DZ = inpgon(ip,3);
  Xneu = X + DX; outpgon(ip,1)= Xneu; X=Xneu;
  Yneu = Y + DY; outpgon(ip,2)= Yneu; Y=Yneu;
  Zneu = Z + DZ; outpgon(ip,3)= Zneu; Z=Zneu;
end;
outpgon(ip+1,1)= Xneu; outpgon(ip+1,2)= Yneu; outpgon(ip+1,3)= Zneu;
test = DONE;
endfunction;

function outpgon=SpolygonKNEE1(inpgon, dxs, dys, dzs, n); // Test = OK
global DONE BUSY PROCESS
test = BUSY;
psiz=size(inpgon); pdim=psiz(1); vdim=psiz(2); lastp=pdim; pivot= 0.00001;
outpgon=inpgon;
DX=dxs; DY=dys; DZ=dzs;
for ip=n:lastp
  X = inpgon(ip,1); Y = inpgon(ip,2); Z = inpgon(ip,3);
  Xneu = X + DX; outpgon(ip,1)= Xneu; //X=Xneu;
  Yneu = Y + DY; outpgon(ip,2)= Yneu; //Y=Yneu;
  Zneu = Z + DZ; outpgon(ip,3)= Zneu; //Z=Zneu;
end;
test = DONE;
endfunction;
```

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

```

#####
##### Induktionswirkungen #####
#####
function isgood=possiPos(idim, kdim, p11, p12, p21, p22); // Routine aus LCS-Kondition
global DONE BUSY PROCESS
  isgood = %t;
  if p11<1 then isgood = %f; end;
  if p21<1 then isgood = %f; end;
  if p12>idim then isgood = %f; end;
  if p22>kdim then isgood = %f; end;
endfunction;

function isgood=notNULL(Nenner); // Test = OK
global DONE BUSY PROCESS
  isgood = %t; pivot=0.000001;
  if (abs(Nenner)<pivot) then isgood = %f; end;
endfunction;

function isgood=into3Frame(map13, i, k, j); // Test = OK
global DONE BUSY PROCESS
  isgood = %t; mSiz= size(map13); imm = mSiz(1); kmm = mSiz(2); jmm=mSiz(3); // disp(mSiz);
  if i<1 then isgood = %f; end;
  if k<1 then isgood = %f; end;
  if j<1 then isgood = %f; end;
  if i>imm then isgood = %f; end;
  if k>kmm then isgood = %f; end;
  if j>jmm then isgood = %f; end;
endfunction;

function isgood=intoAniFrame(imm, kmm, jmm, i, k, j); // Test = OK
global DONE BUSY PROCESS
  isgood = %t; // mSiz= size(map13); imm = mSiz(1); kmm = mSiz(2); jmm=mSiz(3); // disp(mSiz);
  if i<1 then isgood = %f; end;
  if k<1 then isgood = %f; end;
  if j<1 then isgood = %f; end;
  if i>imm then isgood = %f; end;
  if k>kmm then isgood = %f; end;
  if j>jmm then isgood = %f; end;
endfunction;

function [xiVout, yiVout]=induzV2generali(eps); // ziemlich umfangreiche Funktion!
global DONE BUSY PROCESS
test = BUSY;
  //mSiz= size(xRin); im = mSiz(1); km = mSiz(2); jm=1; //
  pi=3.14; pivot=0.01;
  idim= (2*eps)+1; kdim= (2*eps)+1;
  GAMM = 1;
  xiVout = zeros(idim,kdim); yiVout = zeros(idim,kdim);
  ic=round(1+ (2*eps)/2); kc=ic;
  for si=(ic-eps):(ic+eps)
    for sk=(kc-eps):(kc+eps)
      ideps = abs(ic-si);
      kdeps = abs(kc-sk);
      rdeps = (ideps^2 + kdeps^2)^.5; // disp(rdeps);
      // ##### Singularität im Zentrum beachten #####
      if (notNULL(rdeps)==%T) then
        xiVout(si,sk) = (GAMM * ideps/rdeps/(2*pi)/rdeps );
        yiVout(si,sk) = (GAMM * kdeps/rdeps/(2*pi)/rdeps );
      end; // notNull
    end;
  end; // of activR
test = DONE;
endfunction;

```

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

```

function [xiVout, yiVout]=induzV2(eps, GAMM); // ziemlich umfangreiche Funktion!
global DONE BUSY PROCESS
test = BUSY;
//mSiz= size(xRin); im = mSiz(1); km = mSiz(2); jm=1;//
pi=3.14; pivot=0.01;
idim=(2*eps)+1; kdim=(2*eps)+1;
//GAMM = 1;
xiVout = zeros(idim,kdim); yiVout = zeros(idim,kdim);
ic=round(1+(2*eps)/2); kc=ic;
for si=(ic-eps):(ic+eps)
for sk=(kc-eps):(kc+eps)
//ideps = abs(ic-si);
//kdeps = abs(kc-sk);
ideps = (ic-si);
kdeps = (kc-sk);
rdeps = (ideps^2 + kdeps^2)^0.5; // disp(rdeps);
// ##### Singularität im Zentrum beachten #####
if (notNULL(rdeps)==%T) then
xiVout(si,sk) = (-1)*(GAMM * ideps/rdeps/(2*pi)/rdeps);
yiVout(si,sk) = (GAMM * kdeps/rdeps/(2*pi)/rdeps);
end; // notNull
end;
end; // of activR
test = DONE;
endfunction;

function outFLD=putalokalMAT2FLD(ipos, kpos, partimap, inFLD); // Routine aus LCS-Kondition!! funktioniert
global DONE BUSY PROCESS
test = BUSY;
gSiz= size(inFLD); iG = gSiz(1); kG = gSiz(2);
pSiz= size(partimap); ip = pSiz(1); kp = pSiz(2);
outFLD=inFLD;
fac=1; // partimap = 10+outFLD(s11:s12,s21:s22);
ipos = ipos - round(ip/2); kpos = kpos -round(kp/2);
s11=ipos; s12=s11+ip-1; s21=kpos; s22=s21+kp-1; // Hier steckt der Höcker! Wenn das mal gut geht??
if (possiPos(iG,kG,s11,s12,s21,s22)==%t) then
outFLD(s11:s12,s21:s22) = outFLD(s11:s12,s21:s22) + fac*partimap;
end;
test = DONE;
endfunction;

##### generierende Routinen austesten
#####

function test=WirbelModell_088; // IO eine sehr gute Routine
global DONE BUSY PROCESS
putpath = 'C:\Users\Micha\Desktop\Mi_HOFFi\LCO\LCO_Data\LCO_FERMAT_000.txt'; // BHT
bdim=100; Ra=30; F=0.1; nn=1.50;
xcc=100; ycc=100; zcc=0.0;
[aX, aY, aZ] = FERMAT(Ra,F,nn,bdim,xcc,ycc,zcc); // Test = OK
vsiz=size(aX); rdim=vsiz(1);
//for i=1:rdim R(i,1)=round(aX(i)); R(i,2)=round(aY(i)); R(i,3)=round(aZ(i)); end;
for i=1:rdim R(i,1)=aX(i); R(i,2)=aY(i); R(i,3)=aZ(i); end;
showframe=3; f=scf(showframe); a=get("current_axes"); a.data_bounds=[0,0,0;200,200,200];
a.thickness = 2; //
plot(aX,aY,'k');title(" a FERMAT-PolyLine "); // ein Bildchen
showframe=4; f=scf(showframe); a=get("current_axes"); a.data_bounds=[0,0,-100;200,200,200];
a.thickness = 1; //
param3d(aX,aY,aZ);
dxx = 50; dyy= 0.0; dzz= 0.0;
fxx = 1.3; fyy= 0.0; fzz= 0.0;
a.thickness = 1; //a.color = 3; //
a.children(1).foreground = 6;
R2= TRANSFORMpolygon_STRETCH(R,fxx,fyy,fzz,xcc,ycc,zcc);

```

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

```
for i=1:(2*bdim) gra2X(i)=R2(i,1); gra2Y(i)=R2(i,2); gra2Z(i)=R2(i,3); param3d(gra2X,gra2Y,gra2Z); sleep(5);end;
xmc=100; ymc=100; zmc= 0.0;
fuu = 1; fvv=2; fww= 0.30;
nfi=1.001;
//R3 = TRANSFORMpolygon_MAGNET(R2,fuu,fvv,fww,xmc,ymc,zmc); // Test = OK aber langweilig
//R3 = TRANSFORMpolygon_SCRAMBL(R2,nfi,fuu,fvv,fww,xmc,ymc,zmc);
xmc=110; ymc=100; zmc= 10.0;
fuu = 1; fvv=1; fww= -5.5;
nfi=1.5;
R3= TRANSFORMpolygon_SCREW(R,nfi,fuu,fvv,fww,xmc,ymc,zmc);
a.children(1).foreground = 4;
for i=1:(2*bdim) gra3X(i)=R3(i,1); gra3Y(i)=R3(i,2); gra3Z(i)=R3(i,3); param3d(gra3X,gra3Y,gra3Z); sleep(5);end;
fprintf(Mat(putpath,R); //Sicherheit.. Startvektor speichern
test= DONE; disp(putpath,"put a MAP = DONE");
endfunction;
```

```
function test=WORKBENCH_Vi_019; // MASTER-Routine. Klappt hervorragend, #####
global DONE BUSY PROCESS
// ##### JOB-card ends #####
//currentStackSize = stacksize();
//stacksize('max') //allows the user to increase the size of this stack to the maximum.
//disp('Maximum stacksize: ' + string(currentStackSize(1)));
// ##### JOB-card ends #####
test = BUSY; disp("BUSY with Mist");
// ##### das Koordinaten-Polygon
#####
// P0=getKOOfile('C:\Users\Michel\Desktop\LCO_Data\LCO_Wirbel_R20-30.txt'); disp(P0);
// P0=getKOOfile('C:\Users\Micha\Desktop\Mi_HOFFi\LCO\LCO_Data\LCO_FERMAT_S_000.txt'); disp(P0);
// 'C:\Users\Micha\Desktop\Mi_HOFFi\LCO\LCO_Data\LCO_FERMAT_S_000.txt';

getpath = 'C:\Users\Micha\Desktop\Mi_HOFFi\LCO\LCO_Data\LCO_FERMAT_R20_n25_xyzc_dim200.txt'; // BHT

P0=getKOOfile(getpath); disp(getpath);
P=P0;
pSiz= size(P); dim = pSiz(1); disp(pSiz);
for i=1:dim XX(i)=P(i,1); YY(i) = P(i,2); ZZ = P(i,3); end;
// showframe=2; f=scf(showframe); plot(XX,YY); xfrect(1,1,100,100); title(" eine POLY-Line "); // ein Bildchen
showframe=2; f=scf(showframe); a=get("current_axes"); a.data_bounds=[0,0,0;200,200,200]; a.thickness = 2; //
plot(XX,YY,'k');title(" a FERMAT-PolyLine "); // ein Bildchen

// Transformationen aus der Grundformation
#####
Fx = 0.1; Fy = 0.1; Fz = 0.0; xcp = 100; ycp = 100; zcp= 0.0;
Fx = 0.0; Fy = 0.0; Fz = 0.0; xcp = 100; ycp = 100; zcp= 0.0;
//Fx = 1.00; Fy = 1.00; Fz = 0.0; xcp = 100; ycp = 100; zcp= 0.0;
Fx = 1.25; Fy = 1.25; Fz = 0.0; xcp = 100; ycp = 100; zcp= 0.0;

P1= TRANSFORMpolygon_STRETCH(P,Fx,Fy,Fz,xcp,ycp,zcp); // Test = OK

//xt=0; yt=0; zt=0; for i=1:dim P1(i,1)=P1(i,1)+xt; P1(i,2)=P1(i,2)+yt; P1(i,3)=P1(i,3)+zt; end;

// ##### in di Graphik MITaufnehmen
for i=1:dim XX1(i)=P1(i,1); YY1(i) = P1(i,2); ZZ1 = P1(i,3); end;
showframe=2; f=scf(showframe); a=get("current_axes"); a.data_bounds=[0,0,0;200,200,200]; a.thickness = 1; //
plot(XX1,YY1,'b');title(" a FERMAT-PolyLine ");

// P=P0;
P=P1; for i=1:dim XX(i)=P(i,1); YY(i) = P(i,2); ZZ = P(i,3); end;
```

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

```

// ##### das Richtungs-Polygon #####
R = polygon2Rpolygon(P);disp(R); // Rixchungsvektor aus dem Polygon ist selbst ein Polygon
rSiz= size(R); rdim = rSiz(1); disp(rSiz);
for i=1:rdim dXX(i)=R(i,1); dYY(i) = R(i,2); end; // disp(dXX); disp("Richtungsvektorkomponente X");
// ##### das Strömungsfeld 2D #####
idim = 200; kdim = 200;
xFELD = zeros(idim,kdim);
yFELD = zeros(idim,kdim);
rFELD = zeros(idim,kdim);
// ##### das induzierte PRE-Pegg-Element 2D #####
Gamma =10; epsilon= 8;
[xiV,yiV] = induzV2(epsilon,Gamma); // zwei lokale V-KomponentenMatrix
showframe=11; f=scf(showframe); ShoMyField3D(showframe," Moore sche Methoden; eine kleine lokale xVi-Matrix
",xiV); // sehr gut
showframe=12; f=scf(showframe); ShoMyField3D(showframe," Moore sche Methoden; eine kleine lokale yVi-Matrix
",yiV);
mSiz= size(xiV); mdim = mSiz(1); disp(mSiz);
for i=1:mdim for k=1:mdim riV(i,k)=( xiV(i,k)^2)+(yiV(i,k)^2) ^0.5; end; end; // dis
showframe=13; f=scf(showframe); ShoMyField3D(showframe," Moore sche Methoden; eine kleine lokale rVi-Matrix
",riV);

// ##### das induzierte Elemente 2D in die MAP eintragen
#####
test = PROCESS; disp("PROCESS: R-Polygon into a Map"); // ##### ankündigen
bruttoxiVR=0.0; bruttoyVR=0.0;
for i=1:rdim // ##### alle Polygon-Elemente
ipos = XX(i); xiVR = Gamma * dXX(i) * xiV;
kpos = YY(i); yiVR = Gamma * dYY(i) * yiV;
xFELD= putalokalMAT2FLD(ipos,kpos,xiVR,xFELD);
yFELD= putalokalMAT2FLD(ipos,kpos,yiVR,yFELD); disp("iter",i);

bruttoxiVR = bruttoxiVR + sum(abs(xiVR)); // SUMM: lokaler Impuls X
brutoyiVR = bruttoyVR + sum(abs(yiVR)); // SUMM Y

end;

disp(bruttoxiVR,"brutto induzierte Geschwindigkeit in X-Richtung.");
disp(brutoyiVR,"brutto induzierte Geschwindigkeit in Y-Richtung.");

test = DONE; disp("DONE: Iterationen ");
// ##### die Komponenten der iV zeigen und speichern #####
showframe=3; f=scf(showframe); ShoMyField3D(showframe," xVi-Feld ",xFELD);
showframe=4; f=scf(showframe); ShoMyField3D(showframe," yVi-Feld ",yFELD);
// putMATfile(xFELD,'C:\Users\Michel\Desktop\LCO_Data\MapofLCO_xGRILL_WEIT.txt');
// putMATfile(yFELD,'C:\Users\Michel\Desktop\LCO_Data\MapofLCO_yGRILL_WEIT.txt');
putpath_X_Matfile = 'C:\Users\Micha\Desktop\Mi_HOFFi\LCO\LCO_Data\MapofFERMAT-LCO_Vx.txt'
putpath_Y_Matfile = 'C:\Users\Micha\Desktop\Mi_HOFFi\LCO\LCO_Data\MapofFERMAT-LCO_Vy.txt'

putMATfile(xFELD,putpath_X_Matfile );
putMATfile(yFELD,putpath_Y_Matfile);
// ##### die Resultierende rV #####

for i=1:idim
for k=1:kdim
rFELD(i,k)= sqrt( (xFELD(i,k)^2) + (yFELD(i,k)^2) ); // hier nochmal nachhaken
end;
end;
// ##### die Resultierende der iV zeigen #####
showframe=5; f=scf(showframe); ShoMyField3D(showframe," das resultierende rVi-Feld ",rFELD);

// ##### POST-Process #####
// getpath1= 'C:\Users\Michel\Desktop\LCO_Data\MapofLCO_xWirbel2030.txt';
// getpath2= 'C:\Users\Michel\Desktop\LCO_Data\MapofLCO_yWirbel2030.txt';

```

Spiralige Lagrange Kohärenter Objekte

```
getpath1= putpath_X_Matfile; vx= getMATfile(getpath1); //
getpath2= putpath_Y_Matfile; vy= getMATfile(getpath2); //

// ##### ein fiktives Druckfeld #####
vSiz= size(vx); idim = vSiz(1); kdim = vSiz(2); disp(vSiz);
cumV = 0.0; cumV2 = 0.0; cumV3 = 0.0; cumVx = 0.0; cumVy = 0.0; cumVxAbs = 0.0; cumVyAbs = 0.0;
for i=1:idim
    for k=1:kdim
        vr(i,k)=sqrt( vx(i,k)^2 + vy(i,k)^2 );
        vir=1*vr(i,k);
        vix=1*vx(i,k);
        viy=1*vy(i,k);
        vue=1; cp = 1-(vir/vue)^2; druckCP(i,k) = cp; // no proper code, yes
        cumV = cumV + vir;
        cumVx = cumVx + vix;
        cumVy = cumVy + viy;
        cumVxAbs = cumVxAbs + abs(vix);
        cumVyAbs = cumVyAbs + abs(viy);
        cumV2 = cumV2 + vir^2;
        cumV3 = cumV3 + vir^3;
    end;
end;
disp(bruttoxiVR,"brutto cum. induzierte Geschwindigkeit in X-Richtung:");
disp(bruttoyiVR,"brutto cum. induzierte Geschwindigkeit in Y-Richtung:");
disp(cumV," Das Impuls-Äquivalent:"); // v kumuliert
disp(cumV2," Das Energie-Äquivalent:"); // v2 kumuliert
disp(cumV3," Das LeistungsVermögen-Äquivalent:"); // v3 kumuliert
disp(cumVxAbs," Das absolute Impuls-Äquivalent inX:");
disp(cumVyAbs," Das absolute Impuls-Äquivalent inY:");
disp(cumVx," Das Impuls-Bilanz: p intoX:"); // vx kumuliert
disp(cumVy," Das Impuls-Bilanz: p intoY:"); // vy kumuliert

//
#####

test = DONE; disp("DONE: FINi ");
endfunction;

function test=Modell_path; // IO
global DONE BUSY PROCESS
putpath = 'C:\Users\Micha\Desktop\Mi_HOFFi\LCO\LCO_Data\LCO_Wirbel_000.txt'; // Path: get DATA
bdim=100; R=20; ycc=100; zcc=0.0;
test= DONE; disp(putpath,"put a MAP = DONE");
endfunction;
```

BEI GRIN MACHT SICH IHR WISSEN BEZAHLT



- Wir veröffentlichen Ihre Hausarbeit, Bachelor- und Masterarbeit
- Ihr eigenes eBook und Buch - weltweit in allen wichtigen Shops
- Verdienen Sie an jedem Verkauf

Jetzt bei www.GRIN.com hochladen
und kostenlos publizieren

